

SÉRIE
N° D'ORDRE : 135

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

John ELLSWORTH

ASSISTANT A L'OBSERVATOIRE DE LYON

1^{re} THÈSE

RECHERCHES SUR LES ÉTOILES DOUBLES A ÉCLIPSES

2^e THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ :
RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE DANS LES SPECTRES STELLAIRES

Soutenues le octobre 1936 devant la Commission d'examen

Président : M. G. DEJARDIN

Examineurs { MM. H. EYRAUD
J. DUFAY

IMPRIMERIE DE TRÉVOUX PRÈS LYON
G. PATISSIER

1936

Recherches sur les étoiles doubles à éclipses

SÉRIE
N° D'ORDRE :

THÈSES

PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

John ELLSWORTH

ASSISTANT A L'OBSERVATOIRE DE LYON

1^{re} THÈSE

RECHERCHES SUR LES ÉTOILES DOUBLES A ÉCLIPSES

2^e THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ :
RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE DANS LES SPECTRES STELLAIRES

Soutenues le octobre 1936 devant la Commission d'examen

Président : M. G. DÉJARDIN

Examineurs { MM. H. EYRAUD
J. DUFAY

IMPRIMERIE DE TRÉVOUX PRÈS LYON
G. PATISSIER

1936

UNIVERSITÉ DE LYON — FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. LONGCHAMBON, *, **, I.

Assesseur

M. VANEY, *, **, I., †.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, C. *, **, I.

RIGOLLOT, *, **, I.

COUTURIER, *, **, I., †.

Professeurs

MM. DULAC, *, **, I., *Calcul différentiel et intégral.*

BEAUVERIE, *, **, I., †, *Botanique.*

MEUNIER, O. *, **, I., *Chimie industrielle.*

SIRE, *, **, I., †, *Mécanique rationnelle et appliquée.*

VANEY, *, **, I., †, *Zoologie.*

CARDOT, *, **, I., *Physiologie générale.*

ROMAN, *, **, I., *Géologie.*

LOCQUIN, *, **, I., *Chimie générale.*

LONGCHAMBON, *, **, I., *Minéralogie.*

DOUIN, *, **, I., *Botanique.*

DEJARDIN, **, I., *Physique Générale.*

SOLLAUD, **, I., *Zoologie.*

THIBAUD, **, A., *Physique expérimentale.*

LEMARCHANDS, **, I., *Chimie appliquée.*

EYRAUD, **, I., *Mathématiques.*

FROMAGEOT **, *Chimie biologique,*

AUMÉRAS, **, *Chimie physique.*

Maitres de conférences adjoints

MM. BONNET, *, **, I., *Zoologie générale et agricole.*

DONCIEUX, **, I., *S. P. C. N.*

Chargés de cours complémentaires

Mlle BACHRACH, **, I., *Physiologie.*

MM. DUFAY, *Astronomie et Physique supérieure.*

VIHET, **, I., *Etude des Roches.*

RANSON, *Géométrie supérieure.*

MAYET, *, **, I., †, *Anthropologie.*

PELOSSE, **, I., *Sériciculture.*

DARESTE DE LA CHAVANNE, **, I., *Géographie physique.*

SEYEWETZ, *, **, I., *Matières colorantes artificielles.*

THOVERT, *Physique.*

PIERRON, *Chimie.*

MERMET, *Mécanique des fluides.*

Secrétaire

M. ROUX, **, A.



A LA MEMOIRE DE MES PARENTS

A MESSIEURS

G. DÉJARDIN

PROFESSEUR DE PHYSIQUE GÉNÉRALE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

J. DUFAY

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE LYON

*Avec sentiments de respect et de profonde
reconnaissance.*

doubles [4]. Des travaux plus récents ont montré des changements de types spectraux de même période que celle de la variation lumineuse. Celle-ci a donc une cause physique et non plus une cause mécanique comme celle des étoiles à éclipses. La théorie classique adoptée aujourd'hui est celle des pulsations de SHAPLEY [5] : le volume augmente pendant l'augmentation d'éclat et la vitesse radiale de la partie visible du disque décroît ; le volume diminue pendant la diminution d'éclat et la vitesse radiale est en croissance. Ce type d'étoile sortant du cadre du présent travail, nous n'en parlerons pas davantage.

Dans l'étude qui va suivre, nous nous proposons, dans le but de mieux connaître les éléments d'un système double à éclipses d'associer les documents photométriques aux documents spectroscopiques ; nous essayerons ainsi d'éliminer quelques-unes des nombreuses contradictions qui existent encore entre les travaux photométriques et spectroscopiques. Dans un premier chapitre, nous allons étudier la détermination des éléments d'après la courbe de lumière. Plus loin, nous chercherons les éléments qui peuvent être révélés par la courbe des vitesses radiales ; puis nous essayerons d'associer ces deux éléments.

Première Partie

Théorie

CHAPITRE PREMIER

Éléments photométriques d'un système double à éclipses, l'orbite étant supposée circulaire.

Méthode de Harting.

Causes de variabilité en dehors des éclipses.

1. — Les travaux les plus anciens concernant Algol sont ceux de E. C. PICKERING [6] et de HARTING [7] ; concernant ceux de β Lyrae ceux de MYERS [8]. La méthode la mieux connue aujourd'hui est celle de RUSSELL [9] ; nous nous contenterons d'en citer quelques passages particulièrement intéressants.

Un point important à signaler est que *la photométrie peut donner seulement des dimensions relatives* : dimensions des rayons des sphères (Algol) ou des axes des ellipsoïdes (β Lyrae), du rayon de l'orbite supposée circulaire ; l'une de ces quantités étant prise pour unité. Comme nous le montrerons plus loin, ces déterminations sont souvent fort incertaines, même lorsqu'elles reposent sur des observations très précises (courbe photoélectrique d'Algol). *Le seul élément que la photométrie donne avec quelque certitude est le rapport entre les brillances des deux composantes* ; ce dernier est égal au rapport des pertes de lumière pendant les éclipses principale et secondaire. Encore cette propriété repose-t-elle sur une hypothèse douteuse : celle de l'uniformité de brillance des disques.

2. — Composantes supposées sphériques avec disques uniformément lumineux. Méthode de Harting.

La méthode que nous nous proposons de développer est celle de HARTING. Nous adoptons comme unité de longueur le rayon de la composante brillante ; et comme

unité d'intensité lumineuse l'intensité lumineuse moyenne du système en dehors des éclipses. Dans leur étude d'Algol, E. C. PICKERING, puis HARTING partent des hypothèses suivantes : la composante obscure n'émet absolument aucune énergie lumineuse, et son volume est plus petit que celui de la composante brillante. Des travaux plus récents sur de nombreuses variables du même type nous conduisent à éliminer dès maintenant la première de ces hypothèses ; et de n'accepter la seconde que lorsqu'elle aura été rendue plausible par un calcul numérique.

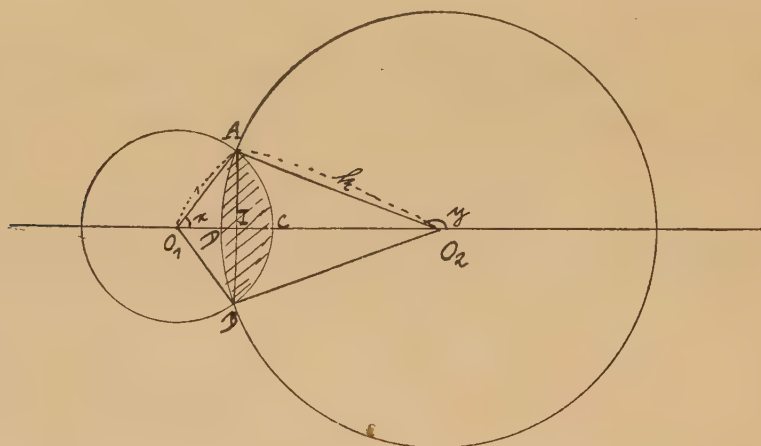


Fig. 1

3. — Aire éclipsee et distance des centres à une phase quelconque.

Soient les deux disques circulaires de centres O_1O_2 et de rayons 1 et k (fig. 1). Si nous supposons O_2 éclipçant O_1 , l'aire éclipsee est la somme des deux segments $ABCI = S_1$ et $ADCI = S_2$. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = (x - \frac{1}{2} \sin 2x) \\ S_2 = k^2 (\pi - y + \frac{1}{2} \sin 2y) \end{array} \right.$$

L'aire totale éclipsee sera : $S = S_1 + S_2$ ou :

$$(1) \quad \left| S = (x - \frac{1}{2} \sin 2x) + k^2 (\pi - y + \frac{1}{2} \sin 2y) \right|$$

Les angles x et y sont reliés par la relation :

$$(2) \quad \left| \sin x = k \sin y \right|$$

L'aire S varie donc en fonction de x .

Soit $O_1O_2=\delta$ la distance des centres ; x varie en fonction de δ . Le triangle O_1AO_2 nous permet d'écrire :

$$(3) \quad \delta^2 = 1 + k^2 - 2k \cos(y - x)$$

Nous avons d'autre part :

$$(4) \quad \delta^2 = a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 i) = a^2 (\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta)$$

où a est le rayon de l'orbite supposée circulaire ; θ la longitude du centre de la composante obscure, celle de l'origine correspondant au milieu de l'éclipse principale ; et i l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport au plan tangent à la sphère céleste.

θ est donné en fonction du temps t par la relation :

$$(5) \quad \theta = 2\pi \frac{t}{P}$$

où P est la période connue de la variable.

De (3) et (4) nous pouvons déduire l'égalité importante :

$$(6) \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - 2k \cos(y - x) + k^2 - a^2 \cos^2 i}{a^2 \sin^2 i}$$

qui nous permettra de calculer la phase θ en fonction de $(y - x)$; les quantités k , a , i , étant supposées connues.

O_1 se rapprochant de O_2 , x croît de 0 (disques tangents extérieurement) à π (disques tangents intérieurement) en passant par $\pi/2$ lorsque O_1 sera sur la corde commune. De x on déduit y d'après (2) et par suite $(y - x)$; d'où la connaissance de θ obtenue par (6). D'autre part S sera tiré de (1) d'après x et y ; de S nous pouvons déduire la lumière perdue, connaissant le rapport des brillances des deux composantes ; la courbe de lumière observée donne la phase observée θ correspondant à la même perte de lumière. Nous la comparerons à la phase calculée d'après (6).

4. — Correction des quantités k , a , i .

De (6) nous tirons les trois dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\sin^2 \theta)}{\partial k} = \frac{2 [k - \cos(y - x)]}{a^2 \sin^2 i} \\ \frac{\partial (\sin^2 \theta)}{\partial a} = - \frac{2 [k^2 - 2k \cos(y - x) + 1]}{a^3 \sin^2 i} \\ \frac{\partial (\sin^2 \theta)}{\partial i} = - \frac{2 [k^2 - 2k \cos(y - x) + 1 - a^2]}{a^2 \sin^2 i \tan i} \end{array} \right.$$

qui se présentent plus commodément sous la forme :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial k} = \frac{2 [k - \cos (y - x)]}{a^2 \sin^2 i \sin 2 \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial a} = - \frac{2 [k^2 - 2 k \cos (y - x) + 1]}{a^3 \sin^2 i \sin 2 \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial i} = - \frac{2 [k^2 - 2 k \cos (y - x) + 1 - a^2]}{a^2 \sin^2 i \tan g i \sin 2 \theta} \end{array} \right.$$

Désignons par θ_c une phase obtenue par le calcul ; par θ_o celle obtenue par l'observation et correspondant à la même perte de lumière. Posons :

$$\Delta \theta = \theta_o - \theta_c$$

Pour simplifier les écritures, posons :

$$\begin{aligned} A &= k - \cos (y - x) \\ B &= k^2 - 2 k \cos (y - x) + 1 \\ C &= \sin^2 i \sin 2 \theta \\ D &= \sin^2 i \tan g i \sin 2 \theta \end{aligned}$$

(7) nous permettra d'écrire l'équation de condition :

$$(8) \quad \left[\frac{1}{2} \Delta \theta = \frac{A}{a^2 C} dk - \frac{B}{a^3 C} da - \frac{B - a^2}{a^2 D} di \right]$$

que nous pourrions résoudre par les moindres carrés.

5. — Causes de variabilité extérieures aux éclipses.

Nous avons cité le cas typique de β Lyrae. Toutes les variables à éclipses qui ont été observées avec précision ont montré des variations semblables en dehors des éclipses, mais d'amplitude très faible pour les étoiles du type Algol. Les causes principales sont les suivantes :

1° *Disques ellipsoïdaux* : Par effet de marée le grand axe a est sensiblement sur la droite qui joint les centres de gravité des deux composantes. Par l'effet de la rotation qui, par hypothèse, aura même durée que la révolution, l'axe de rotation c sera le plus petit axe ; et le troisième axe b , dans le plan de l'orbite et perpendiculaire à a , devra satisfaire à la condition $a > b > c$. C. MYERS [8] montra que β Lyrae pouvait satisfaire à cette hypothèse, les deux composantes étant presque en contact l'une avec l'autre ; ce qui donne une figure pratiquement comparable à celle de DARWIN pour l'équilibre d'une masse fluide en rotation et en voie de scission.

Il est physiquement impossible que les axes b et c soient égaux ; il est cependant impossible de révéler leur inégalité par l'observation. L'inclinaison de c étant invariable par rapport à l'observateur ne causera aucune variation lumineuse. D'autre part, nous pouvons remplacer les disques elliptiques projetés sur un plan perpendiculaire au rayon visuel à une phase $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ et dont les axes sont b et c par des disques circulaires ayant même aire. Cet artifice mathématique nous permet de poser $b = c$; et par suite de supposer les composantes comme étant des ellipsoïdes de révolution dont le grand axe a est l'axe de révolution. Les documents photométriques ne nous donneront que deux axes a et b . Nous pourrons plus tard calculer c en nous basant sur les théories de DARWIN d'où l'on tire les formules empiriques pour des corps presque sphériques (type Algol) :

$$b - c = \frac{2}{3} (a - b)$$

et pour des corps plus allongés (type β Lyrae) :

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1 - 4,4 a^3}{1 + 3,1 a^3}, \quad \frac{c^2}{a^2} = \frac{1 - 3,4 a^3}{1 + 8,6 a^3}$$

2° *Effet de phase ou de réflexion* : Avec un photomètre au sélénium, STEBBINS [10] trouva que la variation d'Algol, hors des éclipses, pouvait être représentée par une droite ascendante entre les phases $\theta = 0$ et $\theta = \pi$; puis descendante entre $\theta = \pi$ et $\theta = 2\pi$. $\theta = \pi$ était marquée par une éclipse secondaire donnant une chute sensiblement équivalente à la croissance précédente. L'explication donnée fut la réflexion de lumière reçue de la composante brillante par la composante obscure ; cette réflexion devant être maximum pour $\theta = \pi$ (face éclairée du côté de l'observateur) ; mais coïncidant avec une éclipse de la composante obscure. Plus tard, le même observateur, employant une cellule photo-électrique au potassium [11], a pu obtenir une courbe montrant la superposition de l'effet ellipsoïdal et de l'effet de réflexion.

3° *Inégalité d'intensité lumineuse des faces* : Certaines étoiles du type Algol montrent deux maxima inégaux : l'éclat de celui qui suit l'éclipse principale étant légèrement supérieur à l'éclat de celui qui la précède (U Cephei est un cas typique) [12]. On peut expliquer ce phénomène en supposant que la face antérieure de la composante brillante est plus brillante que sa face postérieure ; cette inégalité pourrait être due à un frottement dans une atmosphère très raréfiée commune aux deux composantes ou à une plus grande ellipticité causée par un rapprochement du périastre.

Pour β Lyrae, c'est tantôt le premier maximum, tantôt le second qui donne le plus de lumière. On pourrait chercher à expliquer cette inégalité changeante par une variation périodique de la phase du périastre.

4° *Inclinaison des grands axes par rapport à la droite joignant les centres* : Un effet de frottement peut causer un retard sur l'effet de marée, d'où une faible différence entre

la phase θ de translation d'une composante autour d'une autre avec les phases θ_1 et θ_2 des rotations des grands axes a_1 et a_2 de chaque composante. Toutefois les différences entre $\theta - \theta_1$ et $\theta - \theta_2$ ne peuvent être que des angles très faibles et ne pourraient être révélées que par des observations d'une très grande précision.

6. — Calcul de l'ellipticité, de l'effet de phase, de l'inégalité d'intensité lumineuse des faces, de l'inclinaison des axes par rapport à la ligne des centres.

Ayant rappelé les principaux faits constatés par l'observation, nous allons chercher à les soumettre à une discussion mathématique. En premier lieu, nous ferons les remarques suivantes pour une étoile du type Algol : 1° Les deux composantes sont forcément des ellipsoïdes ; mais la distance des centres étant grande par rapport aux demi-axes a_1, a_2 , l'éclipse n'a lieu que pendant une courte fraction de la période. 2° La presque constance d'éclat en dehors des éclipses nous oblige à conclure qu'il n'y a que très peu de différence entre a_1, b_1 et c_1 ainsi qu'entre a_2, b_2 et c_2 . Nous aurons donc une solution numérique suffisamment approchée de la vérité en supposant les composantes sphériques. Ce ne sera que dans le cas où la courbe aura été étudiée avec très grande précision qu'il pourrait y avoir lieu de tenir compte de l'inégalité des axes dans l'étude de l'éclipse.

Pour les étoiles du type β Lyrae où les composantes sont presque en contact, il y a éclipse pendant une très grande fraction de la période. Il est donc indispensable de tenir compte de la forme ellipsoïdale pour étudier les éclipses.

Méthode de Myers [8] :

Dans son étude de β Lyrae, cet auteur suppose les grands axes dans le prolongement l'un de l'autre, et par suite rigoureusement sur la ligne des centres. *Il part de l'hypothèse que le plan de l'orbite contient le rayon visuel* (d'où l'inclinaison $i = \pi/2$).

A un instant donné, chaque composante se projette suivant une ellipse dont le petit axe b est constant, et dont le grand axe a_v variable est la projection du grand axe a de l'ellipsoïde de révolution. Posant $b/a = q$, MYERS démontre que :

$$(10) \quad \left| a_v = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} = b \frac{1}{\sqrt{q^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = bf \right|$$

Pour une phase donnée, l'aire apparente d'une des composantes sera :

$$S_0 = \pi b^2 f$$

Si, pour les deux composantes, nous posons :

$$\frac{b_1}{a_1} = q_1, \quad \frac{b_2}{a_2} = q_2 \quad \text{avec } q_1 \neq q_2$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{q_2^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}$$

L'aire apparente totale des deux composantes, abstraction faite de l'éclipse, sera :

$$S = \pi (b_1^2 f_1 + b_2^2 f_2)$$

Pendant une éclipse, il y a lieu de calculer la somme des aires de deux segments elliptiques ; les ellipses ayant leurs grands axes dans le prolongement l'un de l'autre. Ces segments elliptiques sont la projection de segments circulaires dont les rayons a_{1v} et a_{2v} sont variables. Ils sont calculables d'après l'égalité (10). Nous pourrions alors par la méthode de HARTING modifiée par la variabilité de a_{1v} et a_{2v} et la constance de $i = \pi/2$ déterminer l'aire éclipsee circulaire M ; les formules (1) (2) et (6) deviennent :

$$(11) \quad \left| M = a_{1v}^2 \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + a_{2v}^2 \left(\pi - y + \frac{1}{2} \sin 2y \right) \right|$$

$$(12) \quad \left| \sin^2 \theta = a_{1v}^2 + a_{2v}^2 - 2a_{1v}a_{2v} \cos (y - x) \right|$$

$$(13) \quad \left| a_{1v} \sin x = a_{2v} \sin y \right|$$

Les valeurs M ainsi obtenues seront converties en aires elliptiques M_0 par la relation :

$$(14) \quad \left| M_0 = M \frac{a_{1v}}{b_1} \frac{a_{2v}}{b_2} = M \frac{1}{\sqrt{(q_1^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} (q_2^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \right|$$

Connaissant M_0 et les phases correspondantes θ , nous pourrions d'après le rapport des brillances des composantes calculer la perte de lumière correspondante et comparer avec l'observation.

Nous insistons sur le fait que MYERS est parti de l'hypothèse de l'inégalité de rapport des axes des composantes, d'où $q_1 \neq q_2$. C'est par calcul numérique qu'il fut conduit à admettre $q_1 = q_2$. Les plus récents travaux théoriques de WALTER ne contredisent que très peu ce premier résultat pour β Lyrae.

La méthode de MYERS, tout en donnant une première explication nette peu modifiée plus tard de la variabilité de β Lyrae a lieu d'être critiquée : 1° L'hypothèse d'inclinaison $i = \pi/2$ nous paraît fort risquée pour un système quelconque. Elle est aujourd'hui contredite pour β Lyrae. 2° Les grands axes des ellipsoïdes ne sont pas forcément compris dans la ligne des centres.

CHAPITRE II

Eléments photométriques d'un système double à éclipses, l'orbite étant supposée circulaire (suite).

Courbe de lumière rectifiée.

Adaptation de la méthode Harting au cas de composantes ellipsoïdales.

1. — Courbe de lumière rectifiée. Méthode de Russell [9].

Soient L_1 et L_2 les intensités lumineuses maxima de chacune des composantes, c'est-à-dire lorsqu'elles nous montrent leur plus grande surface elliptique. *L'ellipticité ε est supposée égale pour chaque composante ; les grands axes sont supposés dans le prolongement l'un de l'autre.* Soient l_1 et l_2 l'intensité lumineuse de chaque composante à un instant donné ; et α la perte de lumière causé par l'éclipse. l étant l'intensité lumineuse totale reçue, nous aurons toujours la relation :

$$(1) \quad l = l_1 + (1 - \alpha) l_2 = (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} [L_1 + (1 - \alpha) L_2]$$

Nous adopterons pour unité d'intensité lumineuse $L_1 + L_2 = 1$, de sorte que, sans éclipse, (1) devient :

$$(2) \quad l^2 = 1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta$$

Par définition, nous appellerons $z = \varepsilon^2 \sin^2 i$ le *facteur d'ellipticité de Russell*. On a alors :

$$(3) \quad \boxed{\delta^2 = 1 - z \cos^2 \theta}$$

En portant l^2 et ordonnées et $\cos^2 \theta$ en abscisses ; les observations donnent, en dehors des éclipses, une droite dont la pente est le coefficient d'ellipticité cherché. En ajoutant ensuite à chaque valeur de l^2 , série de l'observateur, la quantité $z \cos^2 \theta$, nous aurons la *courbe rectifiée* : parallèle aux abscisses en dehors des éclipses. Un point quelconque de la courbe pendant une éclipse est identique à celui qui serait obtenu si les deux com-

posantes étaient sphériques. Les rayons des sphères équivalentes d_1 et d_2 sont donnés par :

$$(4) \quad \begin{cases} d_1^2 = a_1^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta) \\ d_2^2 = a_2^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta) \end{cases}$$

où a_1 et a_2 sont les grands axes ⁽¹⁾. Ces égalités montrent que les *rayons des sphères varient en fonction de θ* .

Si la durée de l'éclipse est assez courte relativement à la période pour que $\cos^2 \theta$ varie suffisamment peu, on pourra admettre des rayons sphériques constants ; sinon il y aura lieu d'appliquer les formules modifiées de la théorie générale de RUSSELL ; ou modifier pour chaque valeur θ la formule (6) de HARTING (Chapitre I).

Cette méthode est intéressante si la cause principale de variabilité extérieure aux éclipses est due à l'ellipticité. D'autres causes peuvent être trouvées après une première approximation de rectification de la courbe. Nous jugeons qu'il y a lieu de faire les critiques suivantes : 1° L'hypothèse de grands axes dans la direction de ligne des centres est risquée. 2° Il n'y a pas nécessairement égalité entre l'ellipticité ε de chaque composante. 3° Cette méthode ne permet pas de calculer l'inégalité lumineuse des faces quand elle existe.

2. — Méthode de Dugan.

Dans son étude de U Cephei, DUGAN [12] représente la variabilité extérieure aux éclipses par la formule suivante :

$$(5) \quad L = a + b \sin \theta - c \cos \theta + d \sin 2\theta - e \cos 2\theta$$

L est l'intensité lumineuse observée ; a une constante ; b le coefficient de différence de brillance des faces de la composante lumineuse ; c le coefficient de réflexion ; e et d sont des coefficients qui ont pour causes à la fois l'ellipticité et le retard de marée, ils seront discutés plus loin.

Chaque point déduit de l'observation étant utilisé pour calculer par les moindres carrés a , b , c , d , e , il sera possible de rectifier la courbe par la formule :

$$L_r = L - b \sin \theta + c \cos \theta - d \sin 2\theta + e \cos 2\theta$$

On obtiendra ainsi, extérieurement aux éclipses, une droite théoriquement représentée par $L = a$.

⁽¹⁾ Ces formules sont approximatives. La formule exacte est :

$$d_1^2 = \frac{a_1^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta)}{1 - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{b_1^2} + \varepsilon^2 \right) \sin^2 i \cos^2 \theta [1 - \sin^2 i \cos^2 \theta]}$$

Le dénominateur peut, pratiquement, être considéré comme l'unité.

Il est à remarquer que ce dernier éclat constant peut être une moyenne des éclats observés, et non leur maximum comme dans la méthode de RUSSELL ; *nous pouvons conventionnellement admettre a comme unité* ⁽¹⁾. Pendant les éclipses, nous avons comme précédemment des ellipses dont l'aire est équivalente à celle de deux cercles de rayons variables. Si nous supposons les rayons constants avec une courbe rectifiée par la méthode de RUSSELL, le rayon admis sera le maximum entre les limites, puisque la courbe constante rectifiée de RUSSELL est celle de l'éclat maximum. Avec la méthode de DUGAN, nous aurons le rayon moyen entre les limites, puisque l'éclat constant rectifié de DUGAN est la moyenne des intensités lumineuses extérieures aux éclipses. *L'erreur commise en supposant les rayons constants sera moins grande avec la méthode de DUGAN qu'avec celle de RUSSELL.*

La méthode de DUGAN a le grand avantage de révéler les quatre causes de variations citées plus haut ; on peut supprimer des termes dans la formule (5) s'il y a lieu. La seule lacune est de ne pas révéler la différence d'ellipticité qui peut exister entre chaque composante : nous verrons que, dans un cas normal, cet effet, s'il existe, est trop petit pour être mis en évidence.

Les deux derniers termes de (5) peuvent être représentés par la formule :

$$d \sin 2\theta - e \cos 2\theta = -e_1 \cos (2\theta + 2\alpha)$$

dans le cas où $d \sin 2\theta$ aurait un maximum pour une phase autre que $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$; fait causé par l'existence d'un angle α entre la ligne des centres et les grands axes des composantes. $2e_1$ sera le *coefficient d'ellipticité de Dugan* et l'angle $+\alpha$ le *retard de marée*. La formule (5) pourra s'écrire comme suit :

$$(7) \quad L = a + b \sin \theta - c \cos \theta - e_1 \cos (2\theta + 2\alpha)$$

3. — Première relation entre le coefficient d'ellipticité $2e_1$ de Dugan et le facteur d'ellipticité z de Russell.

Admettons qu'en dehors des éclipses l'intensité lumineuse ne varie que par suite de l'ellipticité des composantes. En prenant comme unité l'intensité lumineuse a de DUGAN, les formules (3) de RUSSELL et (7) de DUGAN, peuvent prendre la forme :

$$L = \sqrt{a_1^2 - z \cos^2 \theta}$$

$$L = 1 - e_1 \cos 2\theta$$

d'où nous tirons l'égalité :

$$\sqrt{a_1^2 - z \cos^2 \theta} = 1 - e_1 \cos 2\theta$$

(1) DUGAN admet comme unité le maximum comme dans la méthode de RUSSELL.

qui, dans les cas particuliers $\theta=0$ et $\theta=\pi/2$, deviendra successivement :

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1^2 - z} &= 1 - e_1 \\ a_1 &= 1 + e_1\end{aligned}$$

Portons la seconde égalité dans la première ; il en résulte, après avoir élevé au carré :

$$(8) \quad \boxed{z = 4e_1} \quad (1)$$

Ayant déterminé le coefficient de DUGAN $2e_1$ par (5) et (7), cette formule (8) nous permettra de calculer le facteur de RUSSELL $z = \epsilon^2 \sin^2 i$, dont la connaissance est indispensable pour tenir compte de l'ellipticité pendant les éclipses en appliquant numériquement (4).

4. — Coefficient d'ellipticité vrai d'Eddington.

Nous venons de voir que RUSSELL et DUGAN ont considéré le phénomène de réflexion d'énergie d'une composante du système par une autre composante comme un simple phénomène de réflexion optique par une surface. A. S. EDDINGTON [13] montre que nous sommes en présence d'un phénomène plus complexe. Chacune des composantes étant dans un état fluide, l'énergie lumineuse reçue par l'une d'elles pénètre jusqu'à une certaine profondeur où elle est absorbée, et se transforme en énergie thermique. Une composante réfléchissante émettra donc une quantité d'énergie composée de la somme de son énergie propre et de celle qu'elle a absorbée provenant de l'autre composante. La réflexion consiste donc physiquement en absorption puis réémission. L'énergie réémise étant très petite par rapport à l'énergie propre de l'étoile, on peut faire l'hypothèse suivante : *l'étoile réémet nécessairement toute l'énergie reçue* ; ou en d'autres termes l'albédo thermique est l'unité. L'observateur ne pouvant analyser que l'énergie lumineuse, *une seconde hypothèse est nécessaire : Le coefficient de réémission pour la lumière ne sera pas inférieur au coefficient de réémission pour l'énergie globale.*

Partant de ces deux hypothèses, EDDINGTON prouve par une analyse mathématique que le coefficient de réflexion c est étroitement lié au coefficient d'ellipticité $2e_1$ de Dugan. Le coefficient d'ellipticité vrai d'Eddington $2e'$ sera donné par la formule :

$$(9) \quad 2e' = 2e_1 + \frac{32c}{9\pi^2} = 2e_1 + 0,36 c$$

(1) Cette formule ne prend sa forme simple $z = 4e_1$ qu'à condition d'adopter a de DUGAN comme unité. En prenant pour unité celle adoptée par RUSSELL et DUGAN, on trouve l'égalité $z = 4(e_1 - e_1^2)$ où toutefois e_1^2 est pratiquement négligeable.

D'autres auteurs (MILNE [14], PIKE [15], KRAT [16]), par des voies de calcul différentes confirment ce dernier résultat d'Eddington.

5. — Nouvelle relation entre le coefficient d'ellipticité $2e_1$ de Dugan et le facteur d'ellipticité z de Russell.

La relation trouvée précédemment entre z et e_1 partant de l'hypothèse de réflexion par les lois simples de l'optique va être modifiée considérant ce qui précède sur les phénomènes thermiques plus complexes. Dans la formule (8) e_1 sera remplacé par e' d'où :

$$z = 4e'$$

qui deviendra d'après (9) :

$$(10) \quad \left| z = 4e_1 + 0,72 c \right| \quad (1)$$

qui est une formule approximative pratiquement suffisante.

6. — Travaux de Walter. Ellipticité de chaque composante [17].

Le coefficient d'ellipticité z étant supposé le même pour chaque composante, on le calcule par une des méthodes précédentes. WALTER met la formule de RUSSELL sous la forme :

$$L_0 = (1 - z \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

L_1 et L_2 sont les intensités lumineuses maxima des composantes supposées d'égale ellipticité.

L'_1 et L'_2 sont les intensités lumineuses maxima des composantes supposées d'inégale ellipticité.

L''_1 et L''_2 sont les intensités lumineuses minima des composantes supposées d'inégale ellipticité.

L'_0 sera l'intensité lumineuse du système pour une phase θ , les composantes étant d'inégale ellipticité ; d'où la formule :

$$(11) \quad L'_0 = L'_1 (1 - z_1 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} + L'_2 (1 - z_2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

où z_1 et z_2 sont les coefficients d'ellipticité de chaque composante. Pour $\theta=0$, on a :

$$L''_1 = L'_1 (1 - z_1)^{\frac{1}{2}} = L_1 (1 - z)^{\frac{1}{2}}$$

$$L''_2 = L'_2 (1 - z_2)^{\frac{1}{2}} = L_2 (1 - z)^{\frac{1}{2}}$$

(1) (10) est établie en adoptant pour unité la constante a de la formule de rectification de DUGAN. En prenant pour unité la constante de la formule de rectification de RUSSELL, nous obtenons :

$$z = 4(e_1 - e_1^2) + 0,72 c - 0,43 c^2 - 0,72 e_1 c$$

où e_1^2, c^2 et $e_1 c$ sont pratiquement négligeables.

d'où il résulte :

$$L'_1 = L_1 \frac{(1-z)^{1/2}}{(1-z_1)^{1/2}} \quad L'_2 = L_2 \frac{(1-z)^{1/2}}{(1-z_2)^{1/2}}$$

La formule (11) devient :

$$L'_\theta = L_1 \frac{(1-z)^{1/2}}{(1-z_1)^{1/2}} (1-z_1 \cos^2 \theta)^{1/2} + L_2 \frac{(1-z)^{1/2}}{(1-z_2)^{1/2}} (1-z_2 \cos^2 \theta)^{1/2}$$

d'où il résulte la différence :

$$(12) \quad \left[L'_\theta - L_\theta = L_1 \left[\frac{(1-z)^{1/2}}{(1-z_1)^{1/2}} (1-z_1 \cos^2 \theta)^{1/2} - (1-z \cos^2 \theta)^{1/2} \right] \right. \\ \left. + L_2 \left[\frac{(1-z)^{1/2}}{(1-z_2)^{1/2}} (1-z_2 \cos^2 \theta)^{1/2} - (1-z \cos^2 \theta)^{1/2} \right] \right]$$

Pour $\theta = \pi/2$, on a $L'_{\pi/2} - L_{\pi/2} = 0$ et $\cos^2 \theta = 0$. On peut calculer z en développant (12), en négligeant à partir des troisième puissances : on obtient la formule approchée :

$$(13) \quad z = L_1 z_1 + L_2 z_2 + \frac{3}{4} L_1 L_2 (z_1 - z_2)^2$$

qui portée dans (12) nous donne :

$$(14) \quad L'_\theta - L_\theta = \frac{1}{32} L_1 L_2 (z_1 - z_2)^2 \sin^2 2\theta$$

avec $|z_1 - z_2| < 0,5$ et $L_1 L_2 > 0,25$,

ou aboutit en résultat numérique :

$$L'_\theta - L_\theta < 0^m,002 \sin^2 2\theta$$

WALTER nous prouve ainsi que la courbe de lumière sera pratiquement la même que l'ellipticité des composantes soient égales ou inégales ; une différence 0,002 en magnitude échappant complètement aux observateurs.

WALTER calcule plus loin les différences d'ellipticité théoriques en se basant sur les lois de la gravitation et en prenant pour données les volumes, masses, densités et distances du centre de gravité des composantes.

Nous attirerons l'attention sur le fait que, si les composantes sont de différents types spectraux, des courbes de lumière monochromatiques de diverses longueurs d'onde donnent des coefficients d'ellipticité différents ; il serait en principe possible de déduire de là l'ellipticité de chaque composante. WALTER lui-même dans une étude de U Cephei [18], comparant une courbe de lumière photographique à une courbe de lumière visuelle, conclut que la composante brillante (type A₀) est sphérique, et la compo-

sante obscure (type K₀) ellipsoïdale. Ce résultat déduit d'observations s'accorde avec la conclusion théorique où l'ellipticité de la composante obscure serait plus de 20 fois supérieure à celle de la composante brillante.

7. — Adaptation de la méthode de Harting au cas de composantes ellipsoïdales.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la courbe rectifiée extérieurement aux éclipses. Avant d'aborder le problème de la rectification pendant les éclipses, il est important de faire les remarques suivantes : 1° Par les méthodes qui précèdent (RUSSELL, DUGAN), *pendant ou en dehors des éclipses, la rectification basée sur l'ellipticité n'est toujours faite qu'au point de vue photométrique.*

2° Les sphères hypothétiques étant variables en fonction de θ pendant les éclipses comme le montrent les formules (4), *pour une perte de lumière donnée, il y aura lieu d'ajouter une rectification de la phase θ .*

Nous pouvons résumer en disant que *la courbe a été rectifiée en ordonnées, mais pas en abscisses.*

Le point capital est de faire remarquer que pour une phase donnée θ , la distance des centres δ est la même, que les composantes soient sphériques ou ellipsoïdales, ce qui revient à dire que les sphères équivalentes soient de rayon constant ou variable. De cette remarque résultent les égalités :

$$(15) \quad \begin{aligned} \delta^2 &= 1 + k^2 - 2k \cos(y-x) \\ \delta^2 &= d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(y'-x') \end{aligned}$$

d_1 et d_2 étant les rayons variables. Dans le cas de sphères constantes, *nous avons pris pour unité le rayon de la composante lumineuse.* Cette quantité devenant maintenant variable, *nous choisirons pour unité sa valeur fixe extérieure aux éclipses, pour une courbe rectifiée de RUSSELL ou DUGAN.* Pour calculer cette unité en fonction du grand axe de la composante brillante, nous appliquons la formule (6) (Chapitre I) mise sous la forme :

$$(16) \quad \cos^2 \theta = \frac{a^2 - \delta^2}{a^2 \sin^2 i}$$

dans le cas de contact extérieur où $\delta = 1 + k$; nous aurons

$$(17) \quad \cos^2 \theta_0 = \frac{a^2 - (1+k)^2}{a^2 \sin^2 i}$$

La phase de contact θ_0 ainsi déterminée sera portée dans la formule (4) de RUSSELL ; d'où le rayon d'unité d_{1c}

$$(18) \quad d_{1c}^2 = 1 - \epsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta_0$$

L'unité adoptée nous fera mettre les formules (4) de RUSSELL sous la forme suivante:

$$(19) \quad \begin{aligned} d_1^2 &= \frac{1}{d_{10}^2} [1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta] \\ d_2^2 &= \frac{k^2}{d_{10}^2} [1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta] \end{aligned}$$

Connaissant maintenant les rayons variables d_1 et d_2 pour une phase réelle θ , et la distance aux centres δ donnée par la première formule (15), nous pourrions calculer $\cos(y'-x')$, y' et x' étant les angles auxiliaires de sphères hypothétiques variables. Ces angles sont ceux qui causeraient la même perte de lumière sur des sphères fixes pour une phase auxiliaire θ' différente de la phase vraie θ . Ils sont donnés par la formule :

$$(20) \quad \cos(y'-x') = \frac{d_1^2 + d_2^2 - \delta^2}{2 d_1 d_2}$$

d'où nous tirons une distance des centres auxiliaire δ'

$$(21) \quad \boxed{\delta'^2 = 1 + k^2 - 2 k \cos(y'-x')}$$

et finalement la phase auxiliaire θ'

$$(22) \quad \boxed{\cos^2 \theta' = \frac{a^2 - \delta'^2}{a^2 \sin^2 i}}$$

θ' et la perte de lumière établie par l'aire éclipsee donnée par (1) (Chapitre I) donnent la courbe de lumière rectifiée en ordonnées et pas en abscisses obtenue par la méthode de RUSSELL ou celle de DUGAN.

Nous supposons les ellipticités ε égales pour les deux composantes, et les axes a_1 , a_2 confondus avec la ligne des centres.

Correction des quantités k , a , i .

Nous écrirons la formule (6) (Chapitre I) en primant les θ , x , y :

$$(23) \quad \sin^2 \theta' = \frac{1 - 2 k \cos(y'-x') + k^2 - a^2 \cos^2 i}{a^2 \sin^2 i}$$

(20) écrit sous la forme suivante nous montre que $\cos(y'-x')$ contient l'expression k :

$$(20') \quad \cos(y'-x') = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} + k - \frac{\delta^2}{d_1} \right]$$

(20') porté dans (23) donne :

$$(23') \quad \sin^2 \theta' = \frac{1 - 2k \cos(y-x) + k^2 - d_1 a^2 \cos^2 i}{d_1 a^2 \sin^2 i}$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial \theta}{\partial a}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial i}$ calculées avec (23) seront les mêmes que celles de (7) (Chapitre I) en primant les θ , x et y . $\frac{\partial \theta}{\partial k}$ devra se calculer d'après (23'); ce qui fera remplacer (7) (Chapitre I) par les formules suivantes :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta'}{\partial k} = \frac{2 [k - \cos(y-x)]}{d_1 a^2 \sin^2 i \cos 2\theta'} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial a} = - \frac{2 [k^2 - 2k \cos(y'-x') + 1]}{a^3 \sin^2 i \sin 2\theta'} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial i} = - \frac{2 [k^2 - 2k \cos(y'-x') + 1 - a^2]}{a^2 \sin^2 i \tan i \sin 2\theta'} \end{array} \right.$$

Après avoir posé :

$$\begin{aligned} A' &= [k - \cos(y-x)] \frac{1}{d_1} \\ B' &= k^2 - 2k \cos(y'-x') + 1 \\ C' &= \sin^2 i \sin 2\theta' \\ D' &= \sin^2 i \tan i \sin 2\theta' \end{aligned}$$

nous aurons l'équation de condition :

$$(25) \quad \left| \frac{1}{2} \Delta \theta' = \frac{A'}{a^2 c'} dk - \frac{B'}{a^3 c'} da - \frac{B' - a^2}{a^2 D'} di \right|$$

où $\Delta \theta' = \theta_0 - \theta'_0$; θ'_0 étant la phase obtenue par le calcul et θ_0 celle obtenue par l'observation.

La remarque importante à faire est que tous les termes de (25), sauf A' , s'obtiennent simplement en primant les θ' , x' , y' de (7) (Chapitre I). d_1 utilisé pour le calcul de A' , avec x et y non primés, est donné par (19).

8. — Effet du retard de marée.

S'il existe un retard de marée appréciable α , nous supposerons les grands axes parallèles et dans le plan de l'orbite. Il sera alors facile de comprendre que la variation hypothétique des rayons des sphères ne sera plus symétrique par rapport au

maximum de perte de lumière. Nous remplacerons alors les angles θ des formules (19) par $\theta - \alpha$. Ces formules deviendront :

$$(26) \quad \begin{aligned} d_1^2 &= \frac{1}{d_{10}^2} [1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 (\theta - \alpha)] \\ d_2^2 &= \frac{k^2}{d_{10}^2} [1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 (\theta - \alpha)] \end{aligned}$$

Les calculs seront ensuite pratiquement les mêmes que dans le paragraphe précédent ; sauf que nous ne pourrons pas replier la courbe maintenant dissymétrique sur une ordonnée passant par le minimum. Une autre remarque importante est à faire : la formule (22) devra maintenant s'écrire sous la forme :

$$(27) \quad \left| \cos^2 (-\theta') = \frac{a^2 - \delta'^2}{a^2 \sin^2 i} \right|$$

(22) était utilisée pour calculer $\pm \theta'$, la courbe étant symétrique. La dissymétrie avec croissance plus rapide que décroissance fait aboutir à des calculs numériques qui nous obligent à adopter $-\theta'$. Une courbe repliée serait fausse, puisque $\cos^2 (-\theta - \alpha)$ et $\cos^2 (\theta - \alpha)$ n'ont pas pour moyenne $\cos^2 \theta$.

Théoriquement, la distance des centres δ devrait être remplacée par $\delta_1 = \delta + \Delta\delta$; $\Delta\delta$ étant une quantité variable en fonction de la phase. Si $\Delta\delta$ était pratiquement connu, nous obtiendrions ainsi la valeur exacte de $\cos (y' - x')$; mais $\Delta\delta$ étant inconnu, nous pouvons écrire :

$$(28) \quad f(\Delta\delta) \cos (y' - x') = \frac{d_1^2 + d_2^2 - \delta^2}{2 d_1 d_2}$$

d'où l'on tire la distance des centres auxiliaire δ' :

$$(29) \quad \delta'^2 = 1 + k^2 - 2 k f(\Delta\delta) \cos (y' - x')$$

et finalement la phase θ' donnée par (27).

Cette intervention de $f(\Delta\delta)$ est indispensable pour éviter $\cos (y' - x') \neq -1$ à l'instant de contact extérieur, tenant compte du retard de marée, alors que l'on doit nécessairement avoir $\cos (y' - x') = -1$.

CHAPITRE III

Orbites elliptiques.

1. — Nous avons considéré jusqu'à présent des orbites circulaires. Il est des cas où, photométriquement, l'excentricité est prouvée : 1° par la non équidistance d'un minimum secondaire avec le minimum principal qui le précède et celui qui lui succède ; 2° plus difficilement par l'inégalité de durée de deux éclipses (principale et secondaire) ; 3° il est

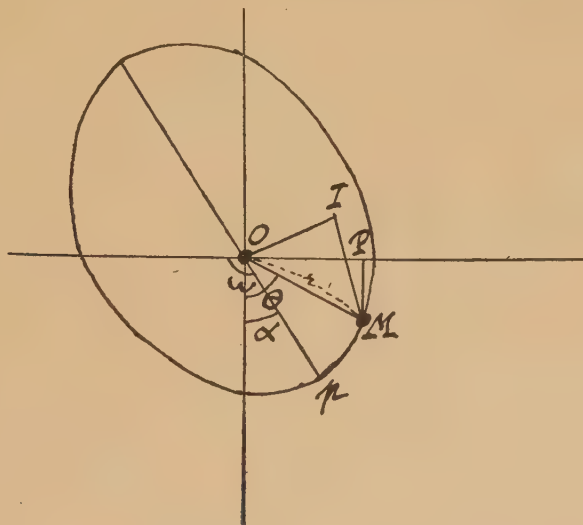


Fig. 2

des cas où les deux cas particuliers qui précèdent sont observables. Le grand axe étant dans la direction du rayon visuel, il y aurait inégalité de durée des éclipses avec équidistance de ces dernières ; celle de plus courte durée correspondant au périastre. Le grand axe étant perpendiculaire à la direction du rayon visuel, il y aurait non équidistance avec égalité de durée des éclipses.

2. — Distance des centres δ [19].

Soient O et M la position dans l'espace des centres de gravité des deux composantes (fig. 2). Soit P la projection de M sur un plan Q perpendiculaire au rayon visuel passant par O . Soit OI une droite comprise dans le plan de l'orbite et le plan visuel, faisant un angle φ avec OP ; I étant sur le plan Q .

On a les égalités :

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \delta \\ \overline{MP} &= \overline{IM} \cos \varphi \\ \overline{IM} &= r \cos \theta\end{aligned}$$

r étant le rayon vecteur et θ l'angle de ce dernier avec le rayon visuel. Nous avons la relation :

$$\begin{aligned}r^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 \\ r^2 &= \delta^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ (1) \quad \delta^2 &= r^2 (1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi)\end{aligned}$$

Nous savons, d'autre part, que :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$$

α étant l'angle du grand axe (sens du périastre) avec le rayon visuel ; a le demi grand axe. Reportant dans (1), nous obtenons :

$$(2) \quad \delta = a(1 - e^2) \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$$

Dans cette formule, les deux variables sont δ et θ . Une condition pour que la distance des centres soit minimum est la nullité de la dérivée $\frac{\partial \delta}{\partial \theta}$. Le calcul montre que cette condition est remplie lorsque :

$$\cos^2 \varphi [\cos \theta + e \cos \theta \cos(\theta - \alpha) - e \sin \theta \sin(\theta - \alpha)] \sin \theta = \sin^2 \varphi e \sin(\theta - \alpha)$$

Pour qu'il y ait éclipse, il faut que φ soit petit, ce qui nous permet de poser approximativement $\sin^2 \varphi = 0$. Il en résulte :

$$(3) \quad \cos^2 \varphi [\cos \theta + e \cos \theta \cos(\theta - \alpha) - e \sin \theta \sin(\theta - \alpha)] \sin \theta = 0$$

Cette formule montre que la nullité de $\frac{\partial \delta}{\partial \theta}$ exige la nullité de $\sin \theta$; ce qui correspond à $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$; ces deux phases sont celles qui correspondent au milieu de l'éclipse principale et au milieu de l'éclipse secondaire : donc à un minimum de la distance δ .

3. — Formule de Tisserand [20].

Au milieu de l'éclipse principale, correspond la longitude vraie θ donnée par la relation :

$$\theta = 2 n \pi$$

n étant le nombre de périodes écoulées depuis une époque origine. La longitude moyenne M est donnée par :

$$M = mt + c$$

où t est le temps compris depuis $\theta = 0$; m et c sont des constantes. Une formule approchée où l'on néglige e^2 donne :

$$(4) \quad \theta = M + 2 e \sin (M - \alpha)$$

Si, d'autre part, comme procède TISSERAND, on confond pratiquement θ avec M en raison de la petitesse de e , nous pourrions écrire (4) sous la forme :

$$(5) \quad M = \theta - 2 e \sin (\theta - \alpha)$$

De cette formule approximative, nous déduirons, après avoir posé $c/m = t_0$, la formule générale de TISSERAND :

$$(6) \quad \left| t = t_0 + \frac{\theta}{m} - 2 \frac{e}{m} \sin (\theta - \alpha) \right|$$

Ne considérant que le cas particulier de l'éclipse principale où $\theta = 0$, nous aurons :

$$(7) \quad \left| t_m = t_0 + 2 \frac{e}{m} \sin \alpha \right|$$

Cette dernière formule prouve, d'après TISSERAND, que les résidus de forme sinusoïdale constatés sur Algol partant d'une période constante seraient causés par une rotation de la ligne des apsides. Nous montrerons plus loin que cette cause est exacte mais insuffisante pour expliquer des faits constatés plus récemment.

4. — Formule de Ch. André [19].

Considérons les deux cas particuliers d'éclipse principale et d'éclipse secondaire ; (6) deviendra :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = t_0 + \frac{2n}{m} \pi + 2 \frac{e}{m} \sin \alpha \\ t_2 = t_0 + \frac{2n+1}{m} \pi - 2 \frac{e}{m} \sin \alpha \end{array} \right.$$

Une soustraction donne :

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{m} \pi - 4 \frac{e}{m} \sin \alpha$$

Sachant que la période est $P = \frac{2\pi}{m}$, on obtient :

$$t_2 - t_1 = P \left(\frac{1}{2} - \frac{2e}{\pi} \sin \alpha \right)$$

Remplaçant l'angle α , avec le rayon visuel, par la longitude du périastre ω qui a pour origine le nœud ascendant ($\sin \alpha = -\cos \omega$), nous obtenons finalement :

$$(8) \quad \left| 2 e \cos \omega = \frac{\pi}{P} \left(t_2 - t_1 - \frac{1}{2} P \right) \right|$$

Cette importante formule permet de calculer numériquement $e \cos \omega$ si nous connaissons un minimum secondaire qui n'est pas à égale distance des minima principaux qui le précèdent et lui succèdent. Il y a lieu de remarquer que cette formule est approximative (égalités (4) et (5)) et ne s'applique rigoureusement qu'au cas où l'inclinaison $i = 90^\circ$. Cette quantité étant souvent mal connue et toujours approchée de 90° , la formule (8) sera souvent pratiquement suffisante.

5. — Formule de H. N. Russell [9].

RUSSELL part de la relation établie précédemment :

$$(9) \quad \delta^2 = r^2 [\cos^2 i + \sin^2 i \cos^2 (v + \omega)]$$

où v est l'argument vrai. Il remplace la longitude vraie $v + \omega = \theta$ par la longitude moyenne M donnée par (4) et le rayon vecteur r par sa valeur :

$$r = 1 - e \cos M$$

Négligeant les termes du second ordre, il obtient ainsi la distance des centres δ en fonction de M . Il prouve que pour cette nouvelle relation, les quantités :

$$(10) \quad \begin{aligned} \theta' &= M + e \cos \omega (\operatorname{cosec}^2 i + 1) \\ \theta'' &= M - \pi - e \cos \omega (\operatorname{cosec}^2 i + 1) \end{aligned}$$

correspondent à un minimum de δ lorsqu'elles sont nulles ; et par suite, à un milieu d'éclipse : θ' à l'éclipse principale et θ'' à l'éclipse secondaire. On pourra écrire les égalités :

$$(11) \quad \begin{aligned} \theta' &= \frac{2\pi}{P} (t - t_1) \\ \theta'' &= \frac{2\pi}{P} (t - t_2) \end{aligned}$$

d'où, par soustraction, on tire avec les précédentes :

$$(12) \quad \left| e \cos \omega (\operatorname{cosec}^2 i + 1) = \frac{\pi}{P} \left(t_2 - t_1 - \frac{1}{2} P \right) \right|$$

Cette relation donnant $e \cos \omega$ s'applique dans le cas où l'inclinaison i arrive à être numériquement connue. Nous ferons cependant remarquer que (12) n'est que très légèrement supérieure à (8) : une application numérique dans le cas où $i = 80^\circ$ donne $\operatorname{cosec}^2 i + 1 = 2,04$; valeur peu différente de 2 que l'on trouve dans (8).

CHAPITRE IV

Éléments d'un système double spectroscopique.

Méthode de Schlesinger simplifiée.

Méthode de Carpenter.

1. — Calcul des éléments d'une étoile double spectroscopique par le procédé des moindres carrés.

Cette méthode fut proposée par R. LEHMANN-FILHÈS [21] ; puis complétée par SCHLESINGER [22].

Nous partons de la formule classique :

$$(1) \quad V = \gamma + K \cos u + K e \cos \omega$$

V est la vitesse radiale d'une composante à une longitude u , l'origine étant au nœud ascendant ; ω est la longitude du périastre ; e l'excentricité de l'orbite ; γ est la vitesse radiale du centre de gravité du système double ; et K la vitesse de translation moyenne de la composante observée, autour du centre de gravité commun. Pour obtenir une équation de condition, SCHLESINGER différencie (1), considérant comme variables γ , K , e , ω , u . La vitesse angulaire moyenne μ , et l'époque origine de passage au périastre T_0 s'introduisent dans l'équation de condition par l'intermédiaire de l'équation de KEPLER.

Dans le cas particulier d'un système double à éclipses, la période étant déterminée avec plus de précision par la photométrie que par la spectroscopie, nous ne voyons pas la nécessité de corriger μ . Les statistiques montrent que l'excentricité d'un système double à éclipses est souvent voisine de zéro. Nous proposons d'adopter pour première approximation $e = 0$, avec une longitude de périastre ω choisie d'après la courbe des vitesses

radiales. L'équation de condition de SCHLESINGER, dans laquelle v est l'anomalie vraie, se présentera sous la forme simplifiée :

$$(2) \quad \boxed{\partial V = \partial \gamma + \cos u \partial K - K \sin u \partial \omega + K (\cos \omega - 2 \sin u \sin v) d e + K \mu \sin u \partial T_0}$$

Pour abréger les écritures dans notre cas particulier, nous posons :

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha &= 0,904 \sin v \\ \Gamma &= \partial \gamma + K \cos \omega \partial e \\ \chi &= \partial K \\ \pi &= -K \partial \omega \\ \varepsilon &= -2,21 K \partial e \\ \tau &= K \mu \partial T_0 \end{aligned}$$

Les inconnues π et τ auront le même coefficient $\sin u$; le système de 5 équations finales à 5 inconnues sera donc irrésoluble. Pour éviter cet inconvénient, nous remplaçons π et τ par une seule inconnue $(\pi + \tau)$. L'équation de condition (2) deviendra :

$$(4) \quad \boxed{\partial V = \Gamma + \cos u \chi + \sin u (\pi + \tau) + \alpha \sin u \varepsilon}$$

d'où nous déduirons un système de 4 équations finales à 4 inconnues.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} [p] \Gamma + [p \cos u] \chi + [p \sin u] (\pi + \tau) + [p \alpha \sin u] \varepsilon &= [p \partial V] \\ [p \cos u] \Gamma + \left[[p] - [p \sin^2 u] \right] \chi + \frac{1}{2} [p \sin 2 u] (\pi + \tau) + \frac{1}{2} [p \alpha \sin 2 u] \varepsilon &= [p \cos u \partial V] \\ [p \sin u] \Gamma + \frac{1}{2} [p \sin u] \chi + [p \sin^2 u] (\pi + \tau) + [p \alpha \sin^2 u] \varepsilon &= [p \sin u \partial V] \\ [p \alpha \sin u] \Gamma + \frac{1}{2} [p \alpha \sin 2 u] \chi + [p \alpha \sin^2 u] (\pi + \tau) + [p \alpha^2 \sin^2 u] \varepsilon &= [p \alpha \sin u \partial V] \end{aligned} \right.$$

où p est le poids de chaque vitesse radiale déduite d'observations.

2. — Détermination de longitude du périastre et de l'époque de passage au périastre.

L'inconnue $(\pi + \tau)$ contient la correction de longitude du périastre, et celle de l'époque de passage au périastre. Nous ne pouvons déterminer l'un sans connaître l'autre.

Faisant varier ω et e , BAKER [23] cherche dans quel cas on obtient l'erreur moyenne quadratique de vitesse radiale $[p v v]$ la plus faible. Ayant obtenu ∂e dans les calculs

précédents, nous nous permettons de ne faire varier que ω . Désignons par ω_1 la première approximation adoptée pour les premiers calculs et ω_2 la seconde approximation cherchée. On a :

$$\partial \omega = \omega_2 - \omega_1$$

ω_2 étant obtenu graphiquement après plusieurs essais numériques. Les égalités (3) donnent :

$$(6) \quad \pi + \tau = K [\mu \partial T_0 - \partial \omega]$$

avec une seule inconnue ∂T_0 .

Faisons l'importante remarque que ω et T_0 seront déterminés avec d'autant plus d'incertitude que l'excentricité e sera plus faible.

3. — Essai d'un raccordement entre les documents spectroscopiques et les documents photométriques.

Les éléments spectroscopiques et les éléments photométriques, calculés indépendamment, ont souvent montré un décalage entre l'époque du minimum photométrique et celle où l'argument de latitude $u = \pi/2$ calculé d'après les vitesses radiales. Des discussions ont porté à croire que ce décalage était réel, causé par des effets physiques [24]. De plus récents travaux ont montré qu'à mesure que l'on était mieux documenté, ce décalage diminuait, puis disparaissait. Citons le travail de PLASKETT [25] sur 21 Cassiopeiae. Les premiers éléments spectroscopiques donnaient une excentricité $e = 0,0200 \pm 0,0057$ et un décalage $+ 0,017 \pm 0,004$ (Epoque photométrique — Epoque spectroscopique). Plus tard, les observations photométriques de STEBBINS portaient à adopter $e = 0$; d'où le décalage $- 0,003 \pm 0,003$. PLASKETT conclut que les décalages sont causés par des erreurs d'excentricité et de longitude du périastre ; il n'y a donc pas lieu de chercher l'hypothèse d'un phénomène physique.

Afin qu'il soit possible d'utiliser pratiquement les documents spectroscopiques et photométriques, pour la détermination des éléments du système, nous proposons une méthode de calcul basée sur l'hypothèse fondamentale suivante : *Le temps du minimum photométrique principal coïncidant avec le milieu de l'éclipse principale coïncide nécessairement avec le temps où l'argument de latitude u est égal à $\pi/2$.*

Un travail de E. F. CARPENTER [26] basé sur cette hypothèse est une modification de l'équation de SCHLESINGER. Une telle méthode oblige à refaire les calculs numériques dès le commencement. Nous proposons de la modifier afin qu'il soit possible d'utiliser les résultats numériques obtenus séparément par spectroscopie et par photométrie.

Nous désignons par t_p une époque déduite d'éléments photométriques, et t_s la même déduite d'éléments spectroscopiques ; puis nous posons :

$$(7) \quad \Delta T = t_p - t_s$$

Tous les indices _s désigneront des données spectroscopiques. CARPENTER démontre la formule suivante :

$$(8) \quad \partial e = \mu F \partial T_o - (1-e^2) G \partial \omega - \mu F \Delta T$$

après avoir posé :

$$G = \frac{1}{(2+e \sin \omega) \cos \omega} \quad F = G \frac{(1+e \sin \omega)^2}{\sqrt{1-e^2}}$$

Il utilise cette dernière égalité pour modifier les équations de condition (2) de SCHLESINGER.

Pour partir d'éléments spectroscopiques déjà obtenus, et nécessitant d'être modifiés par des éléments photométriques, nous proposons d'ajouter à (8) une différentielle de l'équation de vitesse radiale (1), en supposant V, u, e, ω comme variables. On obtient :

$$(9) \quad \left[\Delta V = K [-\sin u \partial u + \cos \omega \partial e - e \sin \omega \partial \omega] \right]$$

Posons : $\Delta V = V_p - V_s$.

Dans le cas particulier de la phase spectroscopique du milieu de l'éclipse déterminé photométriquement : V_p devient γ et V_s sera désigné par V_m . On pose :

$$\Delta V_m = \gamma - V_m$$

Si nous posons pour le cas général :

$$\Delta u = u_p - u_s$$

le cas particulier qui nous préoccupe sera exprimé par :

$$\Delta u_m = \frac{\pi}{2} - u_s \quad \text{ou} \quad u_s = \frac{\pi}{2} - \Delta u_m$$

Si nous remplaçons dans (9) ΔV par ΔV_m , u par u_s et ∂u par Δu_m , nous avons l'égalité suivante qui exprime le cas particulier du milieu de l'éclipse :

$$(10) \quad \left[\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m = K [\cos \omega \partial e - e \sin \omega \partial \omega] \right]$$

La formule (8) de CARPENTER, où l'on remplace ΔT par ΔT_m correspondant à $u = \pi/2$, et (10) que nous venons d'établir forment un système de deux équations à trois inconnues : $\partial T_o, \partial \omega, \partial e$:

$$A \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu F \Delta T_m = \mu F \partial T_o - (1-e^2) G \partial \omega - \partial e \\ \Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m = K [\cos \omega \partial e - e \sin \omega \partial \omega] \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système, une inconnue doit être supprimée. Deux cas sont à considérer :

1° On pose $\partial \omega = 0$.

Le système A prend la forme :

$$B \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu F \Delta T_m = \mu F \partial T_o - \partial e \\ \Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m = K \cos \omega \partial e \end{array} \right.$$

Il en résulte les égalités :

$$(11) \quad \partial e = \frac{\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m}{K \cos \omega}$$

$$(12) \quad \partial T_o = \Delta T_m + \frac{\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m}{\mu K \cos \omega} \frac{(2 + e \sin \omega) \cos \omega \sqrt{1 - e^2}}{(1 + e \sin \omega)^2}$$

2° On pose $\partial e = 0$.

Le système A prend la forme :

$$C \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu F \Delta T_m = \mu F \partial T_o - (1 - e^2) G \partial \omega \\ \Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m = -K e \sin \omega \partial \omega \end{array} \right.$$

Il en résulte les égalités :

$$(13) \quad \partial \omega = - \frac{\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m}{K e \sin \omega}$$

$$(14) \quad \partial T_o = \Delta T_m - \frac{(1 - e)^{3/2} (\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m)}{(1 + e \sin \omega)^2 \mu K e \sin \omega}$$

Guidé par les documents dont on dispose, on peut avoir des raisons pour donner la préférence à l'un des deux cas ou un cas intermédiaire. Dans le cas le plus général, on a des limites données par les trois inégalités suivantes :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m}{K \cos \omega} > \partial e > 0 \\ 0 > \partial \omega > - \frac{\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m}{K e \sin \omega} \\ \frac{(2 + e \sin \omega) (1 - e^2)^{1/2}}{(1 + e \sin \omega)^2} > \frac{(\partial T_o - \Delta T_m) K \mu}{\Delta V_m + K \Delta u_m \cos \Delta u_m} > - \frac{(1 - e)^{3/2}}{(1 + e \sin \omega)^2 e \sin \omega} \end{array} \right.$$

4. — **Calcul de ΔT_m , ΔV_m , $\Delta u_m \cos \Delta u_m$.**

Dans l'équation (7) mise sous la forme :

$$\Delta T_m = T_p - T_s$$

T_p est directement donné par l'observation photométrique du milieu de l'éclipse ; T_s doit se calculer d'après l'équation de KEPLER :

$$E_s - e \sin E_s = \mu (T_s - T_o)$$

E_s étant l'anomalie excentrique correspondant à la phase $u_m = \omega + v_m = \pi/2$, v_m est donné soit par la formule classique :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

soit par la formule approximative suivante proposée par SCHLESINGER [2] :

$$v = M + 2(E-M) + \frac{e^2}{4} \sin 2M$$

et applicable seulement dans le cas où $e \leq 0,14$. M est l'anomalie moyenne ; $\frac{e^2}{4} \sin 2M$ est donné en fonction de E et de M par la table I de SCHLESINGER ; $(E - M)$ est donné par les tables de ÅSTRAND. On peut aussi avoir directement v en fonction de M par les tables de SCHLESINGER UDICK [27].

Pour le calcul de ΔV_m donné par :

$$\Delta V_m = \gamma - V_m$$

on applique la formule (1) mise sous la forme :

$$V_m = \gamma + K \cos u_s + K e \cos \omega$$

avec :

$$u_s = \frac{\pi}{2} - \Delta u_m = \omega - v_s$$

u_s se calcule comme précédemment en résolvant l'équation de KEPLER avec l'époque T_p du milieu de l'éclipse photométrique :

$$E_p - e \sin E_p = \mu (T_p - T_o)$$

On cherchera E_p comme on a procédé pour E_s .

Connaissant v_s , on en déduit u_s ; Δu_m ; V_m ; puis ΔV_m , d'après les formules qui précèdent.

5. — Applications numériques. (1)

Nous donnerons quelques exemples numériques de l'application de notre méthode.

δ Librae.

1° Les premiers éléments spectroscopiques de SCHLESINGER [28] donnent $e = 0,054$ et $\omega = 29^\circ 2$. Comparés aux éléments photométriques de STEBBINS [29], on obtient :

$$\Delta T_m = T_p - T_s = +0,076 \text{ jour}$$

En posant $\partial \omega = 0$, on obtient : $\partial e = -0,054$, d'où les nouveaux éléments $e = 0$, $\omega = 29^\circ 2$.
En posant $\partial e = 0$, on obtient : $\partial \omega = +103^\circ 1$, d'où les nouveaux éléments $e = 0,054$, $\omega = 132^\circ 3$.

2° Les seconds éléments spectroscopiques de SCHLESINGER, calculés par STEBBINS donnent $e = 0$. Il résulte des éléments photométriques de STEBBINS :

$$\Delta T_m = T_p - T_s = +0,031 \text{ jour}$$

En posant $\partial \omega = 0$, on obtient : $\partial e = 0$.

Ces deux solutions tendent à prouver que l'excentricité de *δ Librae* est nulle ou au moins très voisine de zéro. Des éléments spectroscopiques plus récents de Mc LANGHLIN [10] donnant $\Delta T_m = +0,002$ semblent confirmer cette conclusion ($e = 0,012$, $\omega = 300^\circ 2$).

TW Draconis.

Les résultats photométriques de BAKER [30] comparés aux éléments spectroscopiques de PLASKETT [31] ($e = 0,054$, $\omega = 90^\circ$) donnent :

$$\Delta T_m = T_p - T_s = -0,009 \text{ jour} \pm 0,010$$

Puisque $\omega = \pi/2$, une variation de e ne peut pas faire changer ΔT_m . Nous sommes donc limités à l'hypothèse $\partial e = 0$. Le calcul nous donne $\partial \omega = -12''$ (quantité presque négligeable). $\partial \omega$ variera suivant la valeur donnée à e .

(1) Voir une application à U Cephei (chapitre XI, paragraphe 4).

CHAPITRE V

Obscurcissement des disques.

1. — D'après ABBOT, l'intensité lumineuse J d'un point du disque solaire s'exprime par la formule empirique [9] [32] :

$$(1) \quad J = J_0 (1 - \kappa + \kappa \cos \gamma)$$

où J_0 est l'intensité du centre ; κ le coefficient d'extinction ; et γ l'angle avec le rayon visuel du rayon mené du centre de la sphère au point J . Pour le Soleil, κ a une valeur voisine de 0,6 variable avec la longueur d'onde. Nous partirons de l'hypothèse qu'une étoile étant comparable au Soleil obéit à une loi pouvant s'exprimer par (1). Les cas limite sont ceux où $\kappa=0$ (disques uniformément lumineux) et où $\kappa=1$ (disques parfaitement obscurcis aux bords). Nous nous proposons de calculer pour la phase donnée d'une éclipse d'un système double à éclipses la quantité de lumière perdue, en tenant compte de (1).

On a établi précédemment que les disques elliptiques de composantes ellipsoïdales sont équivalents à des disques circulaires de rayons variables d_1 d_2 de rapport constant $d_2/d_1 = k$; nous traiterons le cas général en ne considérant que des disques circulaires. La distance des centres δ est donnée par :

$$\delta^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_2 \cos (y-x)$$

Divisons chaque terme par d_1^2 :

$$\frac{\delta^2}{d_1^2} = 1 + k^2 - 2 k \cos (y-x)$$

Nous retombons sur une formule semblable à celle de deux sphères en remplaçant la distance des centres δ par une valeur $\delta_1 = \delta/d_1$ qui en est numériquement très approchée puisque d_1 est conventionnellement très voisin de l'unité. *Il nous sera donc permis de procéder comme dans le cas de deux disques circulaires constants en remplaçant δ par δ_1 .*

La perte d'intensité lumineuse E est donnée par l'expression :

$$E = \int_c \int J_0 (1 - \kappa + \kappa \cos \gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma d\varphi$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$(2) \quad E = 2 \int_0^x d\varphi \int_{\rho=\rho_1}^{\rho=1} J_0 (1 - \kappa + \kappa \cos \gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma$$

en prenant pour origine O_1 le centre du disque éclipsé et pour ligne des abscisses celle qui comprend les deux centres. Pour un angle φ quelconque, ρ_1 est la distance entre le centre O_1 et le bord du disque éclipsant (fig. 3).

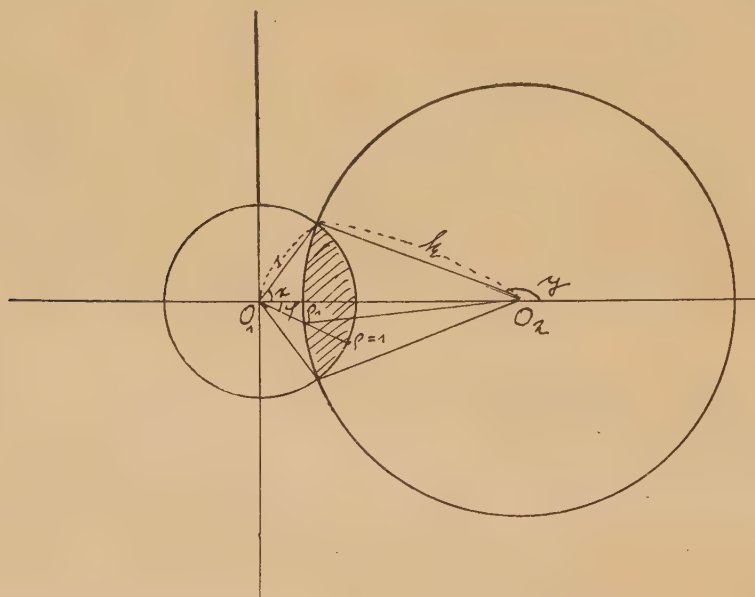


Fig. 3

Le rayon du disque brillant étant égal à 1 par hypothèse, nous aurons $\rho_1 = \sin \gamma_1$, où :

$$(3) \quad \gamma_1 = \arcsin \rho_1$$

Pour calculer ρ_1 , le triangle $O_1 P_1 O_2$ nous donne :

$$k^2 = \rho_1^2 + \delta_1^2 - 2 \rho_1 \delta_1 \cos \varphi$$

d'où l'on tire la limite ρ_1 :

$$(4) \quad \rho_1 = \delta_1 \cos \varphi \pm \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}$$

le signe — devant le radical étant le seul géométriquement acceptable. L'égalité (3) devient :

$$(5) \quad \gamma_1 = \arcsin [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]$$

L'expression (2) pourra s'écrire :

$$(6) \quad E = 2 \int_0^x d\varphi \int_{\arcsin [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]}^{\pi/2} J_0 (1 - \kappa + \kappa \cos \gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma$$

Après avoir posé :

$$(7) \quad \begin{cases} \cos^2 \gamma_1 = 1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2 \\ \cos^3 \gamma_1 = [1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2]^{3/2} \end{cases}$$

nous obtiendrons finalement :

$$(8) \quad E = 2 J_0 \int_0^x \left(\frac{1 - \kappa}{2} \cos^2 \gamma_1 + \frac{\kappa}{3} \cos^3 \gamma_1 \right) d\varphi$$

Cette dernière formule s'applique au cas le plus général où κ a une valeur quelconque comprise entre 0 et 1. Dans le cas limite des bords parfaitement obscurcis où $\kappa = 1$, (8) deviendra :

$$(9) \quad E_1 = \frac{2}{3} J_0 \int_0^x [1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2]^{3/2} d\varphi$$

Dans l'autre cas limite où $\kappa = 0$, c'est-à-dire lorsque les disques sont uniformes, (8) devient :

$$(10) \quad E_2 = J_0 \int_0^x [1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2] d\varphi$$

Le disque étant uniforme, la quantité E_2 ne peut être que le produit de l'intensité lumineuse J_0 par l'aire éclipsee. Si nous calculons cette dernière par la voie des intégrales, nous obtenons bien :

$$S = \int_0^x [1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2] d\varphi$$

qui est une confirmation de (10). Nous pourrions faire usage de la formule plus simple, précédemment établie (chapitre I, paragraphe 3).

$$S = (x - \frac{1}{2} \sin x) + k^2 (\pi - y + \frac{1}{2} \sin 2y)$$

(10) devient alors :

$$(10') \quad E_2 = J_0 \left[(x - \frac{1}{2} \sin x) + k^2 (\pi - y + \frac{1}{2} \sin 2y) \right]$$

La formule générale pour une valeur quelconque de x comprise entre 0 et 1 pourra se mettre sous la forme :

$$(11) \quad E = (1 - x) E_2 + x E_1$$

ou en posant $E_1 = J_0 I$:

$$(11') \quad E = (1 - x) J_0 S + x J_0 I$$

I étant fourni par des tables obtenues par intégration de (9), faisant varier x pour diverses valeurs de k .

2. — Calcul de J_0 .

1° Cas d'une éclipse totale :

Les phases entre lesquelles le disque le plus petit et le plus brillant serait totalement caché par l'autre composante donnent l'intensité lumineuse totale perdue E_t par l'observation d'une constance d'éclat au minimum. Le rayon de la composante la plus brillante étant l'unité, on a $S = \pi$; et par suite :

$$(12) \quad E_t = (1 - x) J_0 \pi + x J_0 I$$

d'où il résulte la formule :

$$(13) \quad J_0 = \frac{E_t}{(1 - x) \pi + x I_t}$$

A chaque valeur donnée au coefficient d'extinction x correspondra une valeur de J_0 . E_t est donné par l'observation et I_t par des tables en fonction de k avec $x = \pi$. Des essais de calculs numériques conduiront à choisir le rayon k de la composante obscure et le coefficient d'extinction x de la composante brillante, en s'orientant d'après (11) ou (11') pendant les phases partielles. x ne pourra bien être déterminé pour la composante obscure que si l'on connaît bien l'amplitude du minimum secondaire causé par une éclipse annu-

laire ; son rayon k et l'inclinaison i de l'orbite ayant précédemment été déterminés par l'éclipse principale. Nous reviendrons plus loin sur les éclipses annulaires. Dans le cas particulier où $\kappa = 1$ (obscurcissement total), (13) deviendra :

$$J_o = \frac{E_t}{I_t}$$

formule dont on sera souvent obligé de se contenter par suite de manque de précision des documents.

2° Cas d'une éclipse partielle :

L'observation du milieu de l'éclipse donne une perte de lumière maximum E_p définie par la formule :

$$(14) \quad E_p = (1 - \kappa) J_o S_m + \kappa J_o I_m$$

qui diffère de (12) par le fait que l'aire maximum cachée S_m n'est pas préalablement connue. Le problème se complique par le fait qu'aux deux quantités κ et I à chercher par tâtonnement numérique s'en ajoute une troisième S_m . J_o sera donné par :

$$(15) \quad J_o = \frac{E_p}{(1 - \kappa) S_m + \kappa I_m}$$

ou plus simplement dans le cas où $\kappa = 1$, par $J_o = \frac{E_p}{I_m}$.

3° Eclipse annulaire :

Soient E_a la perte de lumière maximum et E_θ la perte de lumière lorsque les deux disques sont tangents intérieurement, c'est-à-dire lorsque la phase correspond aux angles $x=0$, $y=0$. On a :

$$E_a > E_\theta$$

Le présent cas particulier est la forme du problème la plus difficile et souvent impossible à résoudre. H. N. RUSSELL et H. SHAPLEY ont nettement montré qu'il est des cas où une éclipse sans constance d'éclat au minimum peut être aussi bien représentée par une éclipse partielle de disque uniforme que par une éclipse annulaire de disque obscurci aux bords. Dans le premier cas, la composante obscure est toujours plus volumineuse que dans le second, et l'inclinaison i de l'orbite plus petite. H. SHAPLEY fait remarquer que pour Algol les belles observations faites par STEBBINS avec une cellule photoélectrique au potassium conduisent à une infinité de solutions suivant la valeur donnée à κ . Pour $\kappa=0$ (disques uniformes), on a une éclipse partielle avec une composante obscure plus grande que la composante brillante ; pour $\kappa=1$ (disques totalement obscurcis aux bords), on a une éclipse annulaire avec une composante obscure plus petite que la com-

posante brillante. Nous remarquerons seulement que dans le cas de l'obscurcissement des disques, la preuve qu'une éclipse principale est annulaire ne sera établie que si l'éclipse secondaire est totale, c'est-à-dire s'il y a constance d'éclat au minimum secondaire.

3. — Remarque.

Les formules (2), (6), (8), (9), (10) sont toujours exactes dans le cas où $k \geq 1$. Si k est < 1 , c'est-à-dire si la composante obscure est moins volumineuse que la composante brillante, pendant les phases croissantes d'une éclipse partielle, ou annulaire, κ croît, passe par un maximum, puis décroît. Les formules (2), (6), (8), (9), (10) ne sont exactes que jusqu'à une limite au-delà de laquelle l'angle $2x$ n'embrasse pas toute l'aire éclipsee. Il y aura lieu de remplacer x par y , et k par $1/k$ dans les formules précédentes qui deviennent :

$$(6') \quad E = 2 \int_0^y d\varphi \int_{\arcsin[\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{1/k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2}^{\pi/2} J_0 (1 - \kappa + \kappa \cos \gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma$$

$$(8') \quad E = 2 J_0 \int_0^y \left(\frac{1 - \kappa}{2} \cos^2 \gamma_1 + \frac{\kappa}{3} \cos^3 \gamma_1 \right) d\varphi$$

$$(9') \quad E_1 = \frac{2}{3} J_0 \int_0^y \left[1 - \left[\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{\frac{1}{k^2} - \delta_1^2 \sin^2 \varphi} \right]^2 \right]^{3/2} d\varphi$$

$$(10'') \quad E_2 = J_0 \int_0^y \left[1 - \left[\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{\frac{1}{k^2} - \delta_1^2 \sin^2 \varphi} \right]^2 \right] d\varphi$$

$$E = (1 - \kappa) E_2 + \kappa E_1$$

$$E = (1 - \kappa) J_0 S + \kappa J_0 I$$

4. — Perte d'intensité lumineuse E_a pendant les phases annulaires.

La formule générale (6) pourra s'appliquer à condition de modifier les limites entre lesquelles sont comprises les quantités à intégrer. Une droite quelconque, faisant un angle φ avec la droite passant par les deux centres O_1 , O_2 , passe par deux points ρ_1 , ρ_2 , sur les bords de la composante éclipante. Nous aurons deux valeurs limites de γ définies par :

$$\gamma_1 = \arcsin \rho_1$$

$$\gamma_2 = \arcsin \rho_2$$

On démontre facilement que :

$$(16) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \arcsin [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}] \\ \gamma_2 = \arcsin [\delta_1 \cos \varphi + \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}] \end{cases}$$

Deux cas sont à considérer :

1° *Le centre O_1 de la composante éclipsee est extérieur au disque de la composante éclipseante.* Dans ce cas, on peut mener de O_1 une tangente au bord de la composante éclipseante, faisant un angle α avec O_1, O_2 . Cet angle est défini par :

$$(17) \quad \alpha = \arcsin \frac{k}{\delta_1}$$

Nous aurons alors la formule suivante au lieu de (6) :

$$(18) \quad E_a = 2 \int_0^\alpha d\varphi \int_{\arcsin [\delta_2 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]}^{\arcsin [\delta_1 \cos \varphi + \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]} J_0 (1 - \kappa + \kappa \cos \gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma$$

2° *Le centre O_1 de la composante éclipsee est intérieur au disque de la composante éclipseante.* — Nous aurons alors $k/\delta_1 > 1$; par suite l'angle α est imaginaire. Comme une droite menée dans un sens quelconque et passant par O_1 rencontrera toujours deux bords ρ_1 et ρ_2 de la composante éclipseante, la limite α sera remplacée par π . On aura :

$$(19) \quad E_a = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_{\arcsin [\delta_2 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]}^{\arcsin [\delta_1 \cos \varphi + \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]} J_0 (1 - \kappa + \kappa \cos \gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma$$

Pratiquement, on fera usage de (18) si $k/\delta_1 < 1$ et de (19) si $k/\delta_1 > 1$

Il nous reste à intégrer (18) et (19) comme nous avons procédé pour (6).

Nous poserons :

$$(20) \quad \begin{cases} \cos^2 \gamma_1 = 1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2 \\ \cos^3 \gamma_1 = [1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2]^{3/2} \\ \cos^2 \gamma_2 = 1 - [\delta_1 \cos \varphi + \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2 \\ \cos^3 \gamma_2 = [1 - [\delta_1 \cos \varphi + \sqrt{k^2 - \delta_1^2 \sin^2 \varphi}]^2]^{3/2} \end{cases}$$

(8) prend alors la forme :

$$(21) \quad E_a = 2 J_0 \int_0^{\alpha \text{ ou } \pi} \left[\frac{1-\kappa}{2} (\cos^2 \gamma_1 - \cos^2 \gamma_2) + \frac{\kappa}{3} (\cos^3 \gamma_1 - \cos^3 \gamma_2) \right] d\varphi$$

Comme précédemment $\int (\cos^2 \gamma_1 - \cos^2 \gamma_2) d\varphi$ est l'aire S de la partie éclipsée, donc l'aire πk^2 du disque éclipçant. $(\cos^2 \gamma_1 - \cos^2 \gamma_2) d\varphi$ devra être intégré graphiquement pour construire des tables de I_a où l'on fait varier κ pour diverses valeurs de k . Nous aurons alors une relation semblable à (11') :

$$(22) \quad E_a = (1 - \kappa) J_0 \pi k^2 + \kappa J_0 I_a$$

I_a est la perte de lumière correspondant à $\kappa = 1$ et $J_0 = 1$.

$$5. - \text{Intégration de } \cos^3 \gamma_1 = \int_0^x [1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta^2 \sin^2 \varphi}]^2]^{3/2} d\varphi$$

Le problème ne peut être définitivement résolu numériquement qu'après intégration de l'expression citée, contenue dans (8). Une intégration rigoureusement exacte étant impossible, RUSSELL s'est contenté, pour le calcul de ses tables I_x et I_y de procéder par des mesures sur des graphiques tracés à la main. Les tables de RUSSELL étant accusées d'inexactitude par certains auteurs, nous désirons montrer dans ce paragraphe qu'il serait possible de les rétablir avec le degré de précision voulu par un calcul sans graphiques.

Posons :

$$\cos^3 \gamma_1 = [1 - f(\varphi)]^{3/2}$$

Développons en série :

$$(23) \quad \cos^3 \gamma_1 = 1 - \frac{3}{2} f(\varphi) + \frac{3}{8} f^2(\varphi) - \frac{3}{48} f^3(\varphi) + \frac{3}{128} f^4(\varphi) - \dots$$

Le terme général de cette dernière sera :

$$\frac{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \left(\frac{3}{2} - 2 \right) \dots \left(\frac{3}{2} - n + 1 \right)}{n!} f^n(\varphi)$$

Le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ donne :

$$R = \pm \frac{\frac{3}{2} - n}{n+1} f(\varphi) = \pm \left(\frac{\frac{3}{2}}{n+1} - \frac{n}{n+1} \right) f(\varphi)$$

Quand $n \rightarrow \infty$ $R \rightarrow \pm 1$

La divergence ou convergence de la série va dépendre de la valeur de $f(\varphi)$. Deux valeurs maxima sont possibles quand $\sin \varphi = 0$:

$$f_1(\varphi) = (\delta - k)^2 = 1$$

$$f_2(\varphi) = (\delta + k)^2 > 1$$

Seule la première expression est à conserver ; la seconde rend $\cos^2 \gamma_1$ imaginaire.

Pendant la phase partielle d'une éclipse $\sin \varphi \neq 0$; donc $f(\varphi) < 1$: la série est convergente. Pendant une phase totale ou annulaire, $\sin \varphi = 0$ et $f(\varphi) = 1$, nous sommes au cas limite du cas précédent. La série étant toujours convergente, nous pouvons l'intégrer par intégration successive de chaque terme. Le développement de ces derniers donne une expression facile à intégrer qui se renouvelle avec changement de coefficients. *Les tables de RUSSELL I_x et I_y pourront donc se calculer avec l'approximation désirée en prenant le nombre de termes voulus dans (23).*

Pour plus de simplicité, ces derniers calculs pourraient se faire par la méthode graphique des trapèzes ou des rectangles. Nous tenions cependant à montrer que *l'on peut se dispenser d'une méthode graphique.*

CHAPITRE VI

Méthode de Harting comparée à la méthode de Russell.

1. — Méthode de Russell.

Nous cherchons dans ce paragraphe à faire comprendre les bases théoriques dont RUSSELL [9] est parti pour calculer ses tables classiques. Nous comparerons ensuite avec la méthode de HARTING, que nous cherchons à moderniser.

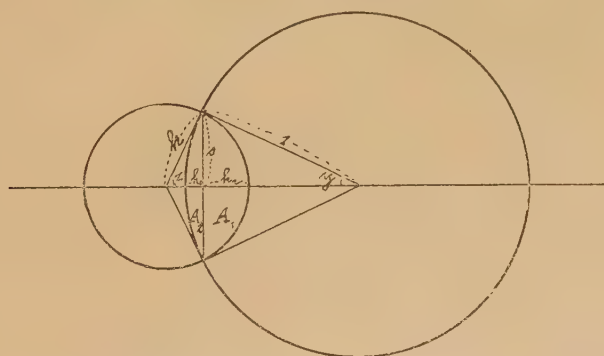


Fig. 4

Considérant deux sphères, l'une petite, de rayon k , l'autre ayant pour rayon l'unité, RUSSELL donne la distance des centres δ par la formule fondamentale :

$$(1) \quad \delta = 1 + k p(k, \alpha)$$

l'aire éclipsee du petit cercle étant son aire totale multipliée par α . Si nous désignons par $2s$ la corde commune des deux sphères (fig. 4), δ peut s'obtenir par la formule :

$$(2) \quad \delta = \sqrt{1 - s^2} \pm \sqrt{k^2 - s^2}$$

En fonction des angles x et y , s est défini par :

$$(3) \quad s = k \sin x = \sin y$$

Soient A_1 et A_2 les aires éclipsées comprises de chaque côté de la corde commune $2s$; on a :

$$(4) \quad \begin{aligned} A_1 &= y - \sin y \cos y \\ A_2 &= k^2 (x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

Si le centre du petit cercle est extérieur à la corde commune, α sera désigné par α_1 ; s'il est intérieur à la corde commune α sera α_2 .

$$(5) \quad \alpha_1 = \frac{A_1 + A_2}{\pi k^2} \quad \alpha_2 = 1 - \frac{A_2 - A_1}{\pi k^2}$$

Considérons les hauteurs h_1 et h_2 des deux segments de cercle dont la somme est l'aire éclipsée ; on a :

$$(6) \quad \begin{aligned} h_1 &= 1 - \sqrt{1 - s^2} = 1 - \cos y \\ h_2 &= k - \sqrt{k^2 - s^2} = k(1 - \cos x) \end{aligned}$$

Les égalités (3) et (6) nous permettent d'écrire :

$$(7) \quad \begin{aligned} s h_1 &= \sin y - \sin y \cos y \\ s h_2 &= k^2 (\sin x - \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{h_1}{s} &= \frac{1 - \cos y}{\sin y} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} y \\ \frac{h_2}{s} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \end{aligned}$$

Avec (4) et (7), nous pourrions écrire A_1 et A_2 sous la forme :

$$(9) \quad \begin{aligned} A_1 &= s h_1 \frac{y - \sin y \cos y}{\sin y - \sin y \cos y} \\ A_2 &= s h_2 \frac{x - \sin x \cos x}{\sin x - \sin x \cos x} \end{aligned}$$

RUSSELL, pour éliminer les angles x et y , pose :

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{y - \sin y \cos y}{\sin y - \sin y \cos y} &= F \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} y \right) = F \left(\frac{h_1}{s} \right) \\ \frac{x - \sin x \cos x}{\sin x - \sin x \cos x} &= F \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) = F \left(\frac{h_2}{s} \right) \end{aligned}$$

Les formules (9) deviennent :

$$(9') \quad A_1 = s h_1 F\left(\frac{h_1}{s}\right) \quad A_2 = s h_2 F\left(\frac{h_2}{s}\right)$$

A chaque valeur de la corde commune $2s$ correspondent deux valeurs de α suivant que le centre est intérieur ou extérieur à la corde ; et de même deux valeurs de la fonction $p(k, \alpha)$. Les égalités (5), (9'), puis (1), (2) et (6), nous portent à écrire :

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{s}{\pi k^2} \left[h_1 F\left(\frac{h_1}{s}\right) + h_2 F\left(\frac{h_2}{s}\right) \right] \\ \alpha_2 &= 1 - \frac{s}{\pi k^2} \left[h_2 F\left(\frac{h_2}{s}\right) - h_1 F\left(\frac{h_1}{s}\right) \right] \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} p(k, \alpha_1) &= 1 - \frac{h_1 - h_2}{k} \\ p(k, \alpha_2) &= \frac{h_2 - h_1}{k} - 1 \end{aligned}$$

Ces quatre dernières formules montrent que connaissant la corde commune $2s$, nous pouvons calculer les deux valeurs correspondantes de α et de la fonction p ; puisque h_1 et h_2 peuvent être converties en s avec (6) pour une valeur de k adoptée. Les fonctions $F(h/s)$ définies par (10) sont calculables partant de s par l'intermédiaire de (6) et (8).

2. — Méthode de Russell comparée à celle de Harting.

La différence fondamentale entre les deux méthodes est la suivante :

1° HARTING dans le but de calculer l'aire éclipée pour différentes phases se base sur les *variations de l'angle x* .

2° RUSSELL dans le même but part de la *variation de la corde commune $2s$* . Pour éliminer les angles x et y , il pose les égalités (10). Nous nous permettons de faire remarquer que cette élimination n'est qu'apparente, puisque dans les formules (11) les fonctions F subsistent, ne pouvant être calculées que par l'intermédiaire des angles x et y avec (6), (8) et (10).

RUSSELL nous dit : « La fonction F varie lentement, et une très petite table lui suffit. » Plus loin, il avoue que sa table I , donnant $p(k, \alpha)$ en fonction de α et k , a été calculée graphiquement. Or, cette table est la base fondamentale de la réalisation pratique par sa méthode ; il n'y a donc pas lieu de s'étonner que cette dernière et d'autres soient chargées d'erreurs numériques, *la base fondamentale n'étant calculée qu'approximativement, et non avec des formules mathématiquement exactes*.

La méthode de RUSSELL :

1° Nous paraît théoriquement plus complexe que la méthode de HARTING ;

2° La nécessité pratique d'en faire usage, non avec des formules rigoureusement exactes, mais avec des graphiques qui ne peuvent être qu'approximatifs, ne la rendent applicable que pour une première approximation.

La méthode de HARTING nous donne la possibilité de faire tous les calculs numériques en ne partant que de formules mathématiquement exactes, et non approximatives.

3. — Calculs pratiques de la méthode de Harting.

Si l'éclipse est totale, les rapports entre durée de la période, durée de l'éclipse et durée de constance d'éclat au minimum nous permettent de calculer une première approximation des éléments du système.

Si l'éclipse est partielle, ou annulaire, sans constance au minimum (obscurcissement des disques), une première approximation peut être donnée en cherchant la courbe théorique de M. DANJON (sous presse), la plus rapprochée de celle donnée par les observations.

Partant d'une première approximation des quantités k , a , i , on calcule les phases θ , et la perte de lumière correspondante α . Comparant la courbe théorique ainsi obtenue avec la courbe observée, on établit l'équation de condition :

$$\frac{1}{2} \Delta\theta = \frac{A}{a^2 C} dk - \frac{B}{a^3 C} da - \frac{B - a^2}{a^2 D} di$$

Un grand avantage de la méthode de HARTING est de permettre de résoudre en même temps la solution U et la solution D . Dans l'équation de condition, seule la quantité $\Delta\theta$ est différente d'une solution à une autre. Il n'est que des cas exceptionnels où il y ait lieu de partir d'une première approximation différente pour les deux solutions (Algol).

Si les disques sont ellipsoïdaux (l'ellipticité z est déterminée par rectification de la courbe), on remplace la formule (6) (chapitre I) ou (16) (chapitre II) par la formule (22) (chapitre II) peu différente.

Pour éviter tous ces longs calculs numériques, on pourrait construire des tables ; nous proposons les suivantes :

- I. — Distance au centre δ et δ^2 en fonction de l'angle x des rayons k .
- II. — Phase θ en fonction du rayon de l'orbite a et de l'inclinaison i .
- III. — Fraction de lumière perdue α , (α_0 étant la perte au milieu de l'éclipse) en fonction de x et de k .
- IV. — Quantité A en fonction de x et de k . La quantité $B = \delta^2$ est donnée par la table I.
- V. — Quantité C en fonction de la phase θ et de l'inclinaison i .
- VI. — Quantité D en fonction de la phase θ et de l'inclinaison i .

Toutes ces tables sauf III sont utilisables à la fois pour les solutions U et D . Dans le cas de solution D , la table III devra être remplacée par la table I_x ou I_y de RUSSELL donnant $p(k, \alpha_1)$ en fonction de α_1 et de k .

4. — Toutes ces tables sont applicables pour des composantes ellipsoïdales. L'ellipticité $\varepsilon_1 = z$ (RUSSELL), $\varepsilon_1 = 4e_1$ (DUGAN), ou mieux $\varepsilon_1 = 4e_1 + 0,72c$ (EDDINGTON) étant trouvée par rectification de la courbe de lumière dans le cas de solution U ; sera pour solution D :

$$\varepsilon_1 = \frac{5}{4} z - \frac{5}{28} z^2$$

Z étant le z précédent de RUSSELL. Connaissant δ^2 d'après la table I , on appliquera la formule (16) (chapitre II) pour le calcul de chaque phase nécessaire. Les autres tables seront ensuite utilisées comme pour des sphères.

5. — Formulaire pour la nouvelle méthode de Harting.

1° Composantes sphériques.

Relation entre les angles x et y (fig. 1, p. 12) :

$$\sin x = k \sin y$$

k = rayon de la composante la moins lumineuse, celui de la composante brillante étant l'unité.

Aire éclipée :

$$S = \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + k^2 \left(\pi - y + \frac{1}{2} \sin 2y \right)$$

Distance des centres δ :

$$\delta^2 = 1 + k^2 - 2k \cos (y - x)$$

Phase θ :

$$\cos^2 \theta = \frac{a^2 - \delta^2}{a^2 \sin^2 i}$$

a = rayon de l'orbite ; i = inclinaison du plan de l'orbite.

2° Composantes ellipsoïdales sans retard de marée.

Rayons variables d_1 , d_2 de sphères hypothétiques (formules approximatives de RUSSELL) :

$$\begin{aligned} d_1^2 &= 1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta \\ d_2^2 &= k^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

(ε = ellipticité)

Cosinus de la différence des angles hypothétiques :

$$\cos (y' - x') = \frac{d_1^2 - d_2^2 - \delta^2}{2 d_1 d_2}$$

Distance hypothétique des centres, les sphères précédemment variables étant supposées constantes :

$$\delta'^2 = 1 + k^2 - 2 k \cos (y' - x')$$

Phase ellipsoïdale θ' :

$$\cos^2 (\theta') = \frac{a^2 - \delta'^2}{a^2 \sin^2 i}$$

3° Cas d'un retard de marée α :

Rayons variables d_1, d_2 de sphères hypothétiques :

$$\begin{aligned} d_1^2 &= 1 - \epsilon^2 \sin^2 i \cos^2 (\theta - \alpha) \\ d_2^2 &= k^2 [1 - \epsilon^2 \sin^2 i \cos^2 (\theta - \alpha)] \end{aligned}$$

Utiliser ensuite les autres formules comme dans 2°.

Résolution par les moindres carrés :

$$\begin{aligned} A &= k - \cos (y - x) \\ \delta^2 &= B = k^2 - 2 k \cos (y - x) + 1 \\ C &= \sin^2 i \sin 2 \theta \\ D &= \sin^2 i \operatorname{tg} i \sin 2 \theta \end{aligned}$$

Equation de condition :

$$\frac{1}{2} \Delta \theta = \frac{A}{a^2 C} dk - \frac{B}{a^3 C} da - \frac{B - a^2}{a^2 D} di$$

Dans le cas de composantes ellipsoïdales, il suffira de primer les A, B, C, D, x, y, θ .

Perte de lumière l : Cas de disques uniformes :

$$l = \frac{L_1}{\pi} S$$

L_1 = Intensité lumineuse de la composante éclairée.

Dans le cas d'obscurcissement des disques, il faut utiliser les tables de RUSSELL : I_x ($k > 1$) ou I_y ($k < 1$) [32]. Dans le premier cas, remplacer k de la table par $1/k$. S sera remplacé par la quantité déduite de la table.

CHAPITRE VII

Effets de perturbations observables dans un système double à éclipses.

1. — Formules empiriques.

Un fait constaté sur les étoiles variables les plus connues, d'un type quelconque, est la possibilité de représenter une époque T de maximum ou minimum par la formule empirique suivante :

$$(1) \quad T = T_0 + PE + aE^2 + bE^3 + c \sin (\alpha E + \beta)$$

dans laquelle T_0 est l'époque originè, P la période moyenne ; E le nombre de périodes comprises entre T_0 et T ; a , b , c , α , β sont des constantes, certaines pouvant être nulles. Si a et b diffèrent de zéro, il y a *variation séculaire* ; si c , α , β diffèrent de zéro, il y a *variation périodique*. Pour des variables autres que des variables à éclipses, nous sommes en présence de phénomènes physiques inconnus jusqu'à ce jour. Nous allons résumer une synthèse des explications théoriques concernant les systèmes doubles à éclipses.

2. — Explications théoriques.

CHANDLER [33] suppose pour le système double d'Algol une *translation autour d'un troisième corps* en une période de 131 ans. Il y aurait un *retard de lumière lorsque le système double s'éloigne et une avance lorsqu'il s'approche*. Nous pouvons ajouter à cette première cause celle de la *rotation des apsides si l'orbite du système double est elliptique*. La période sera raccourcie lorsque le périastre s'approche de l'observateur, et inversement lorsqu'il s'éloigne. *L'effet observé serait une résultante de ces deux causes*.

TISSERAND [20] part de l'hypothèse que la durée de rotation de chaque composante d'Algol considéré comme un système double est égale à la durée de révolution. Par

suite de rotation, chaque composante prendra la forme d'un ellipsoïde de révolution ayant pour axe l'axe de rotation.

L'aplatissement polaire, ainsi conçu, sera cause d'une rotation des apsides en sens direct, et nous dispense de l'hypothèse d'un troisième corps. TISSERAND aboutit à une formule théorique :

$$(2) \quad T = T_0 + PE + \frac{P}{\pi} e \sin (\lambda_0 + \lambda_1 E)$$

semblable à la formule empirique (1) avec $a=b=0$.

A l'effet de rotation de TISSERAND, RUSSELL [34] ajoute un effet de marée ; chaque composante d'un système double prenant alors la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, le plus petit étant l'axe de rotation et le plus grand celui compris sur une droite joignant les deux centres (voir chapitre I, paragraphe 5). RUSSELL aboutit ainsi à des formules théoriques plus complexes que celles de TISSERAND ; mais la généralité des faits ainsi démontrés restent qualitativement semblables à ceux établis par TISSERAND.

Reprenons la théorie de CHANDLER. Avec trois composantes, nous sommes en présence du problème des trois corps : aux simples mouvements de translation s'ajouteront des perturbations. D'autre part, des déformations causées par rotation et marées, semblables à celles de TISSERAND et RUSSELL, viennent ajouter d'autres perturbations. Nous jugeons les connaissances acquises par l'observation actuellement insuffisantes pour approfondir ces problèmes purement théoriques.

Nous concluerons simplement que dans un cas donné la théorie de CHANDLER peut avoir sa part de vérité, de même que la théorie de TISSERAND-RUSSELL, pour expliquer les changements de durée de période.

3. — Confirmations données par l'observation.

Dans une discussion de 14 années d'observations spectroscopiques, ROSSITER [35] signale la constance de vitesse radiale du centre de gravité du système β Lyrae. Nous sommes sans doute en présence d'un cas où le système n'est formé que de deux composantes. La théorie TISSERAND-RUSSELL est suffisante.

Pour Algol [36], λ Tauri [37], VV Orionis [38], une variation périodique de vitesse radiale du centre de gravité fut trouvée. La translation du système double autour d'un troisième corps est ainsi prouvée. La théorie de TISSERAND-RUSSELL est alors insuffisante. Nous devons lui ajouter celle de CHANDLER. Remarquons que pour Algol, la période est très courte (1 an 885) ; celle de 131 ans de CHANDLER est ainsi expliquée.

Pour Y Cygni, les éléments spectroscopiques de PLASKETT (1919-21) et ceux de REDMAN (1928-29) [39] prouvent une rotation des apsides. Nous ne pouvons dire s'il y a seulement effet de rotation et marée (TISSERAND-RUSSELL) ou translation autour d'un troisième corps. Un cas semblable est montré par RU Monocerotis [40] (excentricité $\geq 0,375$) ; durée de

plusieurs milliers d'années. YY Sagittarii [41] (excentricité = 0,10) ; durée voisine de 200 années. Ces deux derniers cas sont prouvés par la photométrie.

Signalons que pour RZ Cassiopeiae [42] (chapitre X, paragraphe 1) et R Canis Majoris [43], nous ne pouvons expliquer les changements de durée de période que par une rotation des apsides en sens rétrograde. Ce cas n'est mécaniquement possible que par une translation rétrograde du système double autour d'un troisième corps. Ces résultats ne sont encore que très discutables.

Remarquons également que nous ne pouvons raccorder les documents spectroscopiques et photométriques de TV Cassiopeiae qu'avec une rotation rétrograde des apsides (chapitre XII, paragraphe 1).

Le peu d'exemples que nous donnons font ressortir la complexité du problème, ainsi que la pauvreté en documents dont nous disposons pour le résoudre.

Seconde Partie

Applications pratiques

CHAPITRE VIII

Méthode d'observations. Calcul numérique des éléments d'un système.

1. — Méthode d'observations.

Le point important que nous cherchons à réaliser est de comparer directement deux étoiles, l'une étant la variable, l'autre une étoile de comparaison supposée constante ; sans qu'il soit nécessaire de faire usage d'une étoile artificielle. L'instrument uti-

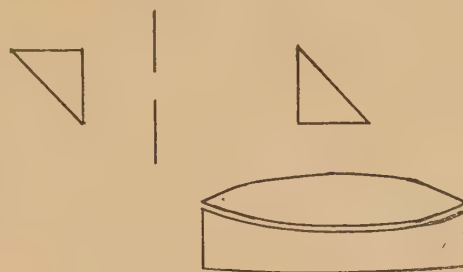


Figure 5

lisé est le photomètre à œil de chat imaginé par M. DANJON [44] [45]. Pour n'en donner qu'une description théorique brève, nous dirons que devant l'objectif d'une lunette astronomique (fig. 5) est un prisme à réflexion totale, et un autre disposé latéralement. Entre ces deux prismes est l'œil de chat (fig. 6) formé de deux plaques métalliques pouvant

glisser l'une sur l'autre. Leur glissement dans le sens de l'axe de la lunette fait varier l'aire d'un carré dont une diagonale est parallèle à cet axe. L'œil à l'oculaire, l'observateur peut voir deux étoiles : les rayons de l'une passant directement par l'objectif, et les rayons de l'autre par l'ouverture de l'œil de chat après réflexion sur les prismes. Le prisme devant l'objectif est immobile ; celui disposé latéralement, mobile autour de deux axes rectangulaires, peut être orienté à l'aide de commandes voisines de l'oculaire, afin de déplacer à volonté l'image de l'étoile dont les rayons passent par l'œil de chat.

L'observation se fait en plaçant les images des deux étoiles à comparer horizontalement afin d'atténuer l'erreur de position. L'œil de chat étant complètement ouvert, l'image de l'étoile passant par ce dernier doit être la plus brillante des deux. S'il était autrement, il faudrait affaiblir l'image de l'autre étoile en diaphragmant l'objectif. L'œil à l'oculaire, on diminue l'ouverture de l'œil de chat jusqu'à égalité des deux points lumineux. On



Figure 6

peut alors lire la longueur de la diagonale du carré sur les graduations de l'instrument. Nous avons adopté de faire 25 pointés par observation ; ce qui nous demande environ dix minutes.

Si la variable est brillante, on peut la faire passer par l'œil de chat et prendre comme étoile de comparaison une étoile télescopique voisine. Si la variable est télescopique, on la fait passer directement par l'objectif, et utilise comme étoile de comparaison une étoile visible à l'œil nu voisine.

Une précaution importante est d'éviter les erreurs causées par un effet PURKINJE-GALLISSOT : une différence de coloration des étoiles comparées pouvant sérieusement fausser les mesures. Afin de l'éviter, il faut autant que possible choisir une étoile de comparaison de même type spectral que la variable. Comme il est rare que l'on puisse atteindre cet idéal, il faut atténuer les erreurs causées par la différence de coloration en mettant dans l'oculaire un coloré jaune ou vert. Cette question a été étudiée par M. DANJON [46]. Nous avons adopté le filtre jaune Wratten n° 4.

Notre instrument a un objectif de 95 mm. d'ouverture et 70 cm. de foyer. Chaque prisme a 4 cm. d'arête et 3 cm. de côté. L'ouverture maximum de la diagonale de l'œil

de chat est de 2 cm. Nous pouvons ainsi, par nuit claire et sans Lune, observer jusqu'à la 11^{me} magnitude.

2. — Réduction des observations.

Connaissant la diagonale du carré de l'œil de chat, on connaît l'aire de ce dernier, et, par suite, le flux lumineux qui le traverse, la magnitude de l'étoile étant supposée connue. Après avoir fait la moyenne arithmétique des 25 pointés d'une observation, on établit d'après les tables [45], la différence entre la magnitude observée et la magnitude correspondant à l'ouverture maximum de l'œil de chat. Si une variable est ainsi observée toujours avec une même étoile de comparaison et le même diaphragme devant l'objectif, les chiffres ainsi obtenus suffisent pour tracer la courbe de lumière à l'aide de laquelle on pourra calculer les éléments du système. Si plusieurs diaphragmes doivent être utilisés pour une même étoile par suite d'une grande amplitude de variation, il faudra rechercher la différence de magnitude apparente avec les divers diaphragmes en faisant usage d'étoiles étalon choisies dans un catalogue photométrique.

3. — Calcul numérique des éléments d'un système.

Connaissant la période de la variable, il est possible de tracer la courbe de lumière avec des points normaux qui seront une moyenne de 3 à 6 observations faites et réduites comme précédemment. Dans une première courbe, les ordonnées seront les différences de magnitude et les abscisses le temps (jours et fractions décimales). Il faut avoir soin de faire en sorte que la différence de magnitude $\Delta m = 0,0$ corresponde sensiblement à la moyenne des points normaux extérieurs aux éclipses. Une seconde courbe de lumière sera ensuite déterminée en convertissant les différences de magnitude Δm en intensités lumineuses L où la moyenne extérieure aux éclipses sera l'unité. Cette précaution permet de convertir le demi coefficient d'ellipticité e_1 de DUGAN en facteur d'ellipticité z de RUSSELL avec une formule exacte :

$$(1) \quad z = 4e_1$$

(chapitre II, paragraphe 3).

La courbe sera rectifiée par la méthode de DUGAN (chapitre II, paragraphe 2). Les points normaux devront alors faire tracer une droite horizontale extérieurement aux éclipses. Sur la courbe bombée précédente, 16 points auront été pris, à égale distance l'un de l'autre, de 15° en 15°, entre les phases $\theta=40^\circ$ et 140° , et $\theta=215^\circ$ et 320° ; l'orbite étant supposée pratiquement circulaire. L'équation de condition (5) de DUGAN (chapitre II, paragraphe 2) sera ainsi mise sous la forme de 16 équations numériques. Les équations

finales seront les suivantes dans lesquelles il ne reste à calculer que le second membre :

$$\begin{cases} + 16,0000 a + 0,5788 c + 6,6666 e = + \Sigma L \\ + 0,5788 a + 4,6668 c - 0,2900 e = - \Sigma L \cos \theta \\ + 6,6666 a - 0,2900 c + 6,2942 e = - \Sigma L \cos 2 \theta \\ + 11,3334 b - 0,2894 d = + \Sigma L \sin \theta \\ - 2,2894 b + 9,7054 d = + \Sigma L \sin 2 \theta \end{cases}$$

Dans le cas où l'orbite est sensiblement elliptique on est porté à faire tout l'ensemble des calculs numériques en partant des équations de condition (Voir le cas de U Cephei et TV Cassiopeiae. Chapitres XI et XII).

4. — Remarques et conventions.

Le fait de considérer, comme EDDINGTON, la réflexion comme une absorption suivie de réémission par la composante secondaire de l'énergie émise par la composante principale, nous conduit à remplacer la formulè (1) par la suivante :

$$(2) \quad z = 4e_1 + 0,72 c$$

qui sera adoptée dans les calculs qui vont suivre (voir chapitre II, paragraphe 5).

La courbe ainsi rectifiée nous permettra de calculer les dimensions relatives des composantes et de l'orbite (chapitre II, paragraphe 7). Nous chercherons successivement à satisfaire l'hypothèse d'uniformité des disques (solution *U*), puis celle d'obscurcissement total du bord des disques (solution *D*). Si possible, nous éliminerons l'une des deux solutions.

Les équations de condition pour corriger les quantités *k*, *a*, *i*, d'une première approximation ont été faites de telle sorte que leurs coefficients numériques soient les mêmes pour les deux solutions. Cette simplification est rigoureusement exacte dans le cas de composantes sphériques, mais cesse de l'être dans le cas de composantes ellipsoïdales. La quantité *d*₁ donnée par les formules (15) de RUSSELL (chapitre II, paragraphe 7) contient le facteur d'ellipticité *z* de RUSSELL sous la forme $\varepsilon^2 \sin^2 i$. *d*₁ se retrouve ensuite dans *A'* contenu dans le premier coefficient de (25). Or, dans le cas de solution *D*, le facteur d'ellipticité *z* de RUSSELL de la solution *U* doit être remplacé par le facteur d'ellipticité *Z* et appliqué à la formule approximative :

$$\varepsilon_1 = \frac{4}{5} Z - \frac{5}{28} Z^2$$

(Voir chapitre VI, paragraphe 4).

Pratiquement, nous considérons que pour une étoile type Algol, *z* peut être numériquement confondu avec ε_1 ; on peut ainsi, approximativement, appliquer la simplification cherchée de mêmes coefficients pour les deux solutions *U* et *D*. Mais dans le cas d'une étoile type β Lyrae, il est plus que probable que tous les calculs numériques seront à refaire pour les deux solutions.

A la fin de chaque chapitre concernant une étoile, nous donnons l'ensemble des éléments du système en prenant comme unité le demi grand axe de l'orbite de l'une des composantes autour de l'autre. Ces éléments pourront ainsi être comparés avec ceux obtenus précédemment par d'autres auteurs.

CHAPITRE IX

W Ursae Minoris.

Eclipse partielle. Orbite circulaire.

1. — Nous discutons une série de 160 observations [47] faites en utilisant l'étoile de comparaison δ Ursae Minoris de même type spectral A_0 que la variable. Les premiers essais de calcul des éléments du système dont nous soyons l'auteur ont été faits en utilisant la méthode de DUGAN pour rectifier la courbe de lumière, et ensuite la méthode de RUSSELL. Le minimum secondaire étant pratiquement équidistant de deux minima principaux ; ne connaissant aucun travail spectroscopique de vitesse radiale pour nous prouver une excentricité ; nous adoptons l'hypothèse d'une orbite circulaire. Une vitesse radiale, récemment publiée par H. JOY et L. DUSTHEIMER [48], confirme l'orbite circulaire que nous adoptons dans ce qui va suivre. Notre travail précédent porte à conclure qu'une solution D est impossible ; ce qui nous oblige à adopter la solution U .

2. — Courbe de lumière rectifiée.

Nous faisons usage de la méthode de DUGAN avec tous ses termes :

$$L = a + b \sin \theta - c \cos \theta + d \sin 2\theta - e \cos 2\theta$$

13 points normaux extérieurs aux éclipses nous font tracer à main levée une courbe bombée montrant nettement deux maxima inégaux, celui à la suite de l'éclipse principale étant le plus brillant. 16 points pris de 15° en 15° sur cette courbe nous donnent le résultat suivant par les moindres carrés.

$a = +0,9891$	
$b = +0,0302$	Inégalité des faces
$c = -0,0006$	Réflexion
$d = -0,0024$	} Retard de marée et ellipticité
$e = +0,0280$	

Une réflexion négative étant physiquement impossible, nous adopterons $c=0$. De calcul du retard de marée nous donne $\alpha=-2^{\circ}27'$ et celui du demi-coefficient d'ellipticité $e_1=+0,0281$ (Chapitre I, paragraphe 9) d'où le facteur d'ellipticité :

$$\varepsilon^2 \sin^2 i = z = 4 e_1 = 0,1124$$

Un retard de marée négatif étant impossible, et un angle de 2° pratiquement négligeable, nous adopterons $\alpha=0$. De la présente discussion résultent les éléments :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = +0,9891 \\ b = +0,0302 \\ 2 e_1 = +0,0562 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Inégalité des faces.} \\ \text{Coefficient d'ellipticité.} \end{array}$$

3. — Calcul des éléments par la méthode de Harting. Hypothèse des disques uniformément lumineux.

Calculant une courbe théorique par la méthode de HARTING à l'aide des éléments précédents tirés de la méthode de RUSSELL, nous obtenons une éclipse principale de trop longue durée par rapport à celle donnée par les observations. Nous sommes ainsi conduit à modifier le rayon a de l'orbite ainsi que l'inclinaison i .

Les quantités :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0,80 \\ a = 3,00 \\ i = 80^{\circ} \end{array} \right.$$

sont ainsi remplacées par :

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 0,80 \\ a = 3,6199 \\ i = 82^{\circ},5 \end{array} \right.$$

l'unité étant le grand axe de la composante brillante projeté sur le plan perpendiculaire au rayon visuel à l'instant de contact extérieur. La courbe théorique déduite de ces dernières quantités, comparée à la courbe déduite des observations ne donne que de très faibles résidus $\Delta\theta$ dont la somme des carrés serait 0,17, $\Delta\theta$ étant exprimé en degrés.

Prenant sur la courbe rectifiée la profondeur relative de chaque éclipse, nous en déduirons le rapport des brillances :

$$\frac{J_b}{J_t} = 6,00$$

d'où d'après les formules :

$$\begin{array}{l} L_b = \pi J_b \\ L_t = \pi k^2 J_t \end{array}$$

nous sommes conduits à adopter pour l'intensité lumineuse de chaque composante :

$$L_b = 0,904 \qquad L_t = 0,096$$

Cette dernière quantité L_b est utilisée pour le calcul de la courbe théorique.

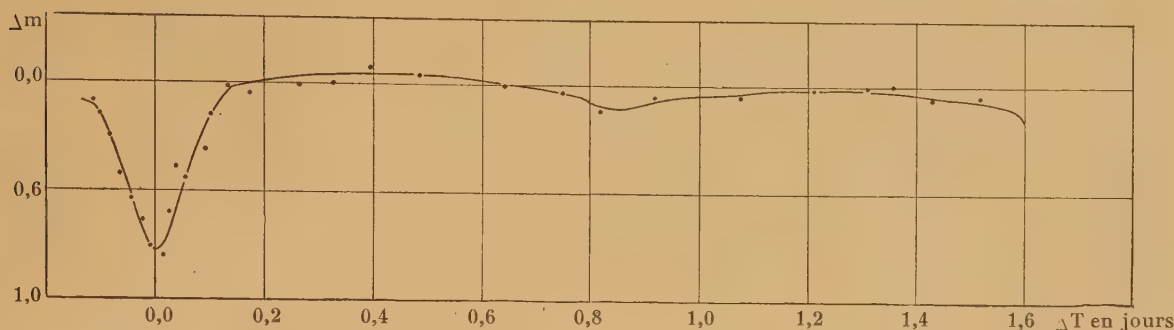


Fig. 7. — W URSAE MINORIS. Courbe théorique. Solution U.

Nous cherchons à améliorer les éléments (b) par les moindres carrés en appliquant l'équation de condition (25) (chapitre II, paragraphe 7) et obtenons :

$$(c) \quad \begin{cases} k = 0,85 \\ a = 3,7162 \\ i = 82^{\circ},8 \end{cases}$$

k étant modifié, des changements doivent intervenir pour L_b et L_t afin de conserver la même profondeur pour l'éclipse principale. Nous sommes ainsi conduit à adopter :

$$L_b = 0,830 \qquad L_t = 0,170$$

ce qui nous oblige à admettre :

$$\frac{J_b}{J_t} = 3.53$$

Cette dernière quantité ne peut pas être admise : 1° à cause de la grande différence avec celle citée plus haut, directement déduite de l'observation ; 2° elle nous porte à admettre un minimum secondaire plus profond que celui observé d'environ 1/10 de magnitude.

Dans le cas qui précède, si les moindres carrés diminuent légèrement les résidus de l'éclipse principale, ils augmentent considérablement ceux de l'éclipse secondaire. Les résidus de la solution (b) non corrigée des moindres carrés étant très faibles ; la discussion qui précède nous conduit à adopter cette solution (b) dans le cas d'uniformité des disques.

Eléments du système W Ursae Minoris.	Solution U	
Demi grand axe de l'orbite	a	1.
Période (DUGAN)	P	1,70116
Milieu de l'éclipse	T	J.J. 2424999,613
Réflexion de la petite composante.....	$2c$	0,000
Excès de brillance de la face avançante de la grande composante	$2b$	0,060
Intensité moyenne de la grande composante..	L_2	0,904
Intensité moyenne de la petite composante..	L_1	0,096
Durée de l'éclipse	D	0,280
Demi axes de la petite composante	a_2	0,246
(obscur)	b_2	0,231
Demi axes de la grande composante.....	a_1	0,289
(brillante)	b_1	0,272
Inclinaison du plan de l'orbite	i	82°,5
Rapport du rayon des composantes	k	0,800
Perte de lumière au minimum secondaire....		0,08
Rapport des brillances des deux composantes	J_2/J_1	6,00
Vitesse radiale du système (JOY-DUSTHEIMER)	γ	105,5 Km. p. s.
Vitesse moyenne de la composante brillante autour du centre de gravité (JOY- DUSTHEIMER)	K	— 7,7 Km. p. s.

CHAPITRE X

RZ Cassiopeiae.

**Eclipse partielle. Orbite faiblement elliptique. Rotation des apsides.
Grand retard de marée.**

1. — Changements de durée de période.

Parmi les connaissances intéressantes acquises sur cette étoile, nous devons citer celle de variation périodique de la période signalée par DUGAN [49] et représentée par la formule :

$$m = J.J. 2417355,4208 + 1 j. 19525E + 0 j. 007 \sin (12^\circ + 0^\circ,068 E)$$

où m est le milieu de l'éclipse principale et E le nombre de périodes écoulées depuis l'époque origine. Le terme en sinus pouvant être causé par une rotation des apsides est obtenu des observations photographiques et visuelles faites de 1896 à 1915.

Le travail de DUGAN fut repris par HELI ERICH [50] en 1921 ; il en résulte la formule :

$$m = J.J. 2417355,4218 + 1 j. 1952512E + 0 j. 0051 \sin (0^\circ,0953E - 6^\circ,6)$$

En 1928, le même auteur [51] se borne à donner une période moyenne dans la formule suivante :

$$m = J.J. 2417355,4200 + 1 j. 1952525 E.$$

disant que le terme sinusoïdal aurait une période d'environ 5200 E , soit environ 17 années.

Citons les recherches de A. de SITTER [52] parues en 1933. Cet auteur applique numériquement l'hypothèse de HERTZSPRUNG [53] développée en formules par WOLTIER [54].

HERTZSPRUNG propose dans le but de calculer la parallaxe d'une étoile double à éclipses à période variable, de tenir compte de l'effet d'aberration après avoir mesuré sur des clichés le déplacement apparent de l'étoile en question pendant cette période ; la

théorie de CHANDLER de translation du système double autour d'un troisième corps étant adoptée. La formule appliquée par A. de SITTER est la suivante :

$$(1) \quad p'' = p' \left(1 + \frac{V}{c} \right) + p' \left(1 + \frac{v-V}{c} \right)$$

dans laquelle p'' est la période apparente observée du Soleil lorsque la vitesse radiale du système double s est v ; V étant la vitesse radiale du système triple S ; c la vitesse de la lumière ; p' est la période moyenne du système s , observée du Soleil. Sa période vraie p sera :

$$p = p' \left(1 + \frac{V}{c} \right)$$

D'après WOLTIER, la phase z basée sur la période vraie p du système s est donnée par :

$$(2) \quad z = z_0 + a (1 - e \cos E) \sin i \sin u$$

z_0 est une constante ; a le demi grand axe de l'orbite du système s autour du centre de gravité de S ; e l'excentricité de cette orbite ; i son inclinaison ; E l'anomalie excentrique et $u = v + \omega$ l'argument de latitude, v et ω étant l'anomalie vraie et ω la longitude du périastre.

En différentiant (2) A. de SITTER obtient une équation de condition à sept inconnues ; cette dernière, appliquée aux résidus donnés par les minima observés, fournit les corrections à apporter à une première approximation. Les résultats définitifs sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 1 \text{ j } 195253065 \pm 0,000000012 \\ P = 5499 p \pm 66 = 18 \text{ ans } \pm 0,22 \\ z_0 = 0,28886 p/c \pm 0,00023 \\ a \sin i = 0,00475 p/c \pm 0,00039 \\ \quad = 0,984 \text{ unités astronomiques } \pm 0,081 \\ e = 0,40 \pm 0,12 \\ \omega = + 161^\circ,2 \pm 3^\circ,3 \\ t_0 = - 0 P, 680 \pm 0,046 \end{array} \right.$$

P est la période de translation du système s autour du centre de gravité de S ; t_0 l'époque de son passage au périastre.

Ce beau travail donne une courbe théorique de résidus qui s'accorde bien avec les observations ; il démontre nettement que le système double à éclipses décrit une orbite elliptique autour d'un troisième corps. Il a cependant lieu d'être critiqué. La solution qui précède ne peut être vraie qu'à condition que le système s décrive une orbite circulaire ; or il est prouvé par les observations spectroscopiques de JORDAN [55] que cette

orbite est elliptique. Il y a donc lieu d'ajouter à l'effet d'aberration étudié un effet de rotation des apsides ; ce qui rend le problème plus complexe. *La solution de A. de SITTER peut tout au plus être vraie qualitativement ; mais il est impossible qu'elle le soit quantitativement.*

2. — Résultats spectroscopiques.

Les mesures de vitesses radiales de la composante la plus brillante du système double correspondent à une époque moyenne voisine de 1912 ($E = 1752$).

JORDAN est conduit à deux solutions possibles de première approximation ; la première avec :

$$\omega = 90^\circ \text{ donne } e = 0,022 \pm 0,020$$

et la seconde avec :

$$\omega = 180^\circ \text{ donne } e = 0,061 \pm 0,022$$

JORDAN adoptant la seconde hypothèse aboutit finalement par les moindres carrés à la solution définitive :

$$\omega = 154^\circ,7 \pm 20^\circ,9 \qquad e = 0,052 \pm 0,025$$

Partant de l'hypothèse d'une rotation des apsides, cette solution ne peut satisfaire aux derniers éléments photométriques de HELLERICH cités plus haut. Nous trouvons graphiquement qu'ils donnent pour l'époque de JORDAN :

$$\omega = 228^\circ \text{ ou } 132^\circ \qquad e = 0,013$$

ω concernant la composante brillante du système ; la dernière valeur correspond à une rotation rétrograde des apsides.

Les résultats photométriques et spectroscopiques étant loin de s'accorder, nous avons repris le problème en partant de la solution primitive suivante [56] :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 1 \text{ j. } 19525 \\ e = 0,00 \\ T_0 = .J.J \text{ } 2419449,518 \text{ (Passage au périastre)} \\ \omega = 90^\circ \\ K = + 67 \text{ Km. p. s.} \\ \gamma = - 40 \text{ Km. p. s.} \end{array} \right.$$

puis nous avons appliqué numériquement sur les observations de JORDAN la méthode

de SCHLESINGER, telle que nous proposons de la simplifier (chapitre IV, paragraphes 1 et 2). Nous aboutissons ainsi à la solution définitive :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 1 \text{ j. } 19525 \\ e = 0,018 \\ T_0 = J.J. 2419449,604 \text{ (Passage au périastre)} \\ \omega = 125^\circ \\ K = + 68 \text{ Km. } 08 \text{ p. s.} \\ \gamma = - 41 \text{ Km. } 00 \text{ p. s} \\ \mu = 301^\circ, 19222 \end{array} \right.$$

dans laquelle les quantités e et ω diffèrent peu de celles déduites précédemment des mesures photométriques, dans le cas d'une rotation rétrograde de la ligne des apsides.

D'après notre solution, le milieu de l'éclipse photométrique serait en retard de 19 minutes sur la phase spectroscopique où les deux composantes sont dans la direction du rayon visuel. Dans la solution de JORDAN, le décalage atteignait 50 minutes en sens inverse.

Une rotation rétrograde des apsides ne peut pas s'expliquer par l'aplatissement des pôles de TISSERAND ou l'effet de marée de RUSSELL ; mais nous oblige à admettre une *translation en sens rétrograde du système double autour d'un troisième corps*. Nous sommes ainsi qualitativement en accord avec les travaux de A. DE SITTER ; ce dernier étant parti de l'hypothèse de translation du système double, alors que nous avons adopté celle de rotation des apsides. Nous sommes porté à conclure que les deux hypothèses ont leur part de vérité. Il resterait à résoudre le problème en associant ces deux hypothèses ; mais malheureusement il y a pénurie de documents. Nous ne connaissons qu'une seule série de mesures spectroscopiques. Plusieurs suffisamment espacées seraient nécessaires pour préciser la rotation des apsides et le changement de vitesse radiale du système double ; il faudrait également qu'elles soient associées à de très bonnes mesures photométriques. Nous nous bornerons à souhaiter que ces documents existeront dans des temps à venir.

3. — Formes de la courbe de lumière.

Les plus anciennes observations, généralement faites par la méthode d'ARGELANDER, portent à conclure l'existence d'une constance d'éclat au minimum de courte durée (environ 20^m). Des mesures photométriques plus précises, celles de DUGAN [57] avec un photomètre à double image de PICKERING, et les photographies de H. D. HODGEN [58], éliminent ce phénomène. Nos 1549 observations faites par la méthode d'ARGELANDER du 31 août 1918 au 28 mai 1928, avec une jumelle, ont été utilisées pour tracer 7 courbes [60] : aucune ne montre la trace d'une constance au minimum. Nos observations, comparées à celles de GADOMSKI, faites de 1921 à 1923, avec une lunette, nous portent à

conclure que l'étoile de comparaison rougeâtre BD + 68°178, sensiblement égale à la variable au minimum (type spectral K_2 , celui de la variable étant A_2) pourrait être cause d'une illusion d'optique variant avec les dimensions de l'instrument. Nous en donnons une explication théorique, nous basant sur l'effet PURKINJE-GALLISSOT [59].

Nos sept courbes semblent montrer des changements [60] : en 1919-20, il paraît y avoir dissymétrie pendant l'éclipse, la branche ascendante étant plus lente. En 1920-21, il y aurait dissymétrie inverse et plus marquée. De 1921 à 1925 il y a symétrie. De 1926 à 1928 une dissymétrie comparable à celle de 1920-21 semble revenir graduellement. Quatre courbes types ont été utilisées pour déterminer les minima. Nous trou-

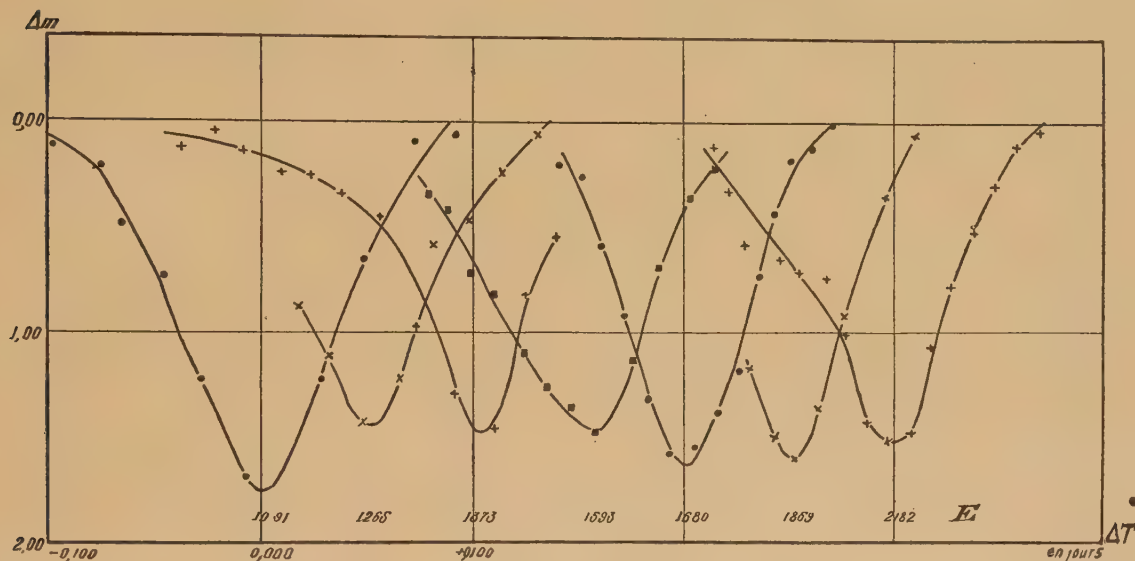


Fig. 8. — RZ CASSIOPEIAE (1931-1934).

Courbes d'éclipses principales obtenues en une soirée avec photomètre à œil de chat.

vons une variation périodique, de la période, d'environ 1080 périodes de la variable, soit le $\frac{1}{5}$ de ce qui fut trouvé par A. DE SITTER, mais sensiblement de même amplitude pour les décalages : 0 j. 005 (comparer avec $a \sin i$). Il est possible que le changement de forme de courbe intervienne dans ce dernier changement de durée de période. Avec seulement la méthode d'ARGELANDER, nous n'osons rien conclure de définitif.

Du 14 mars 1931 au 4 novembre 1934, nous avons fait une série de 193 observations, avec notre photomètre à œil de chat ; sauf exceptions, chacune comprend 25 pointés. Les rayons de la variable passaient directement par l'objectif alors que ceux de l'étoile de comparaison, Cassiopeiae, spectre A_5 , celui de la variable A_2 , passaient par les prismes et l'œil de chat d'ouverture variable. La courte durée de l'éclipse principale (voisine de 5 heures) nous décida à observer, en cas de circonstances favorables, une

éclipse entière en une soirée. Les 14 mars 1931 ($E=1091$) et 15 février 1933 ($E=1680$), nous trouvons des courbes symétriques, alors que les 3 novembre 1932 ($E=1593$) et 8 octobre 1934 ($E=2182$), nous trouvons une dissymétrie nettement marquée, la branche ascendante étant plus rapide que la branche descendante (fig. 8). Les circonstances météorologiques, distance zénithale, et absence de Lune, ayant dans ces quatre soirées été

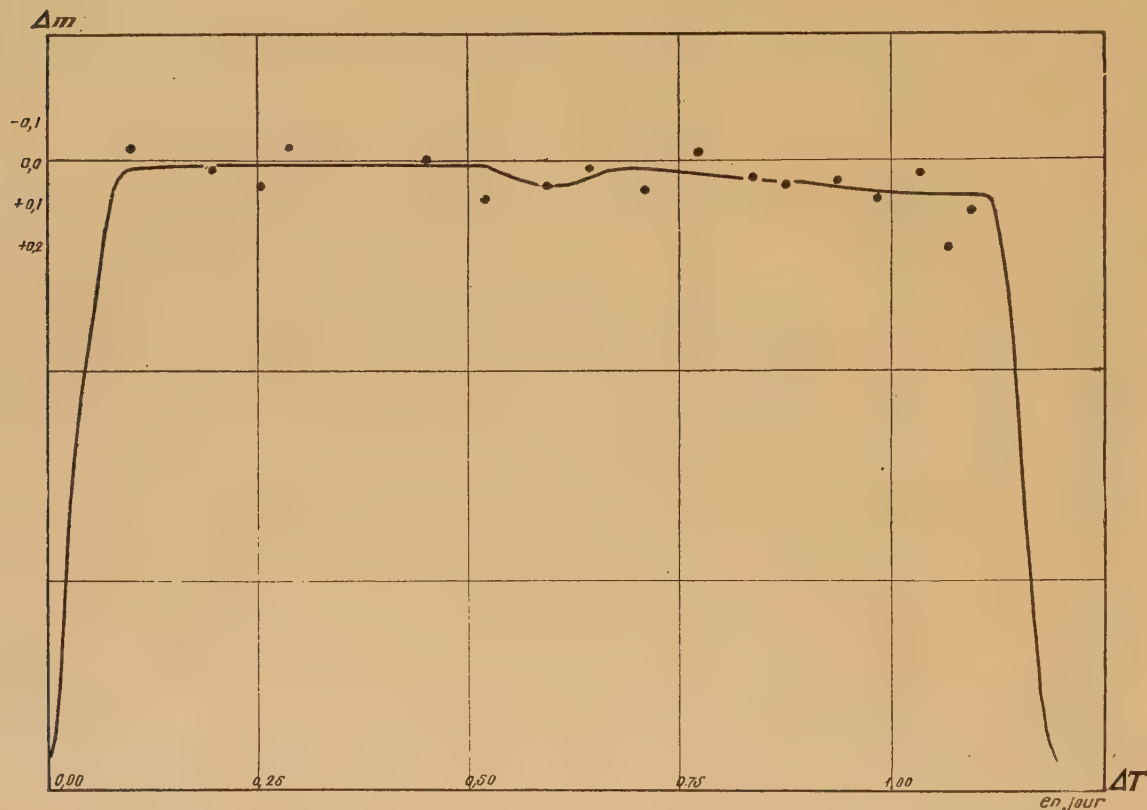


Fig. 9. — RZ CASSIOPEIAE.
Courbe théorique. Solution U. Retard de marée de $+45^\circ$.

des plus favorables, nous pouvons conclure qu'il existe des changements de forme de courbe de lumière. Nous avons ainsi avec le photomètre à œil de chat confirmé ce que nous n'avions pu que soupçonner avec la méthode d'ARGELANDER.

La courbe de lumière moyenne est la meilleure que nous ayons obtenue jusqu'à présent. Elle pourrait presque se tracer sans le calcul de points normaux. L'éclipse principale montre la dissymétrie qui vient de nous préoccuper. L'éclipse secondaire est si faible que, sans être contredite, elle ne peut pas être nettement confirmée. Cette courbe doit être considérée comme une moyenne des diverses formes de courbes qui auraient pu exister dans le cours de la série d'observations.

4. — Courbe de lumière rectifiée.

Extérieurement aux éclipses, 13 points normaux nous font tracer une droite horizontale entre l'éclipse principale et l'éclipse secondaire (les points sont irrégulièrement répartis) et une courbe descendante entre l'éclipse secondaire et l'éclipse principale. 16 points sur ces courbes sont pris de 15° en 15° pour le calcul des coefficients de l'équation de DUGAN :

$$L = a + b \sin \theta - c \cos \theta + d \sin 2\theta - e \cos 2\theta$$

Les moindres carrés nous donnent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = +0,9758 \\ b = +0,0234 & \text{Inégalité des faces} \\ c = +0,0154 & \text{Réflexion} \\ d = +0,0103 \\ e = -0,0003 & \left. \begin{array}{l} \text{Retard de marée} \\ \text{et ellipticité} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

d et e mis dans l'équation suivante :

$$d \sin 2\theta - e \cos 2\theta = -e_1 \cos (2\theta + 2\alpha)$$

nous portent à adopter :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_1 = +0,0103 & \text{Demi-coefficient d'ellipticité de Dugan.} \\ \alpha = +45^\circ 50' & \text{Retard de marée.} \end{array} \right.$$

Le facteur d'ellipticité z de RUSSELL sera donné par la formule déduite des travaux d'EDDINGTON :

$$z = 4 e_1 + 0,72 c = +0,0523$$

Il est intéressant de comparer la réflexion c et le facteur d'ellipticité $z = \epsilon^2 \sin^2 i$ obtenus par divers observateurs utilisant chacun sa méthode personnelle :

Méthode	Réflexion c	Ellipticité z	Observateur
Visuelle sans filtre	0,0285	+0,0531	DUGAN
Visuelle filtre jaune	0,0154	+0,0523	ELLSWORTH
Photographique	0,0050	+0,0656	H. D. HODGEN

La réflexion est beaucoup plus faible avec les plus petites longueurs d'onde. L'ellipticité se confirme entre observations visuelles, et la différence n'est pas énorme avec les photographies.

Le grand retard de marée paraît étonnant ($\alpha = +45^{\circ}50'$) : Il est semblable à celui qui a été trouvé sur RS Canum Venaticorum par B. W. SITTERLY ($\alpha = 45^{\circ}$) [61].

Les coefficients trouvés plus haut, a , b , c , d , e , nous donnent une courbe de lumière rectifiée rectiligne et horizontale extérieurement aux éclipses, mais l'éclipse principale est toujours dissymétrique. Quatre points normaux avancent la fin de l'éclipse d'environ $\Delta\theta = 8^{\circ}$ à 10° sur ce qu'elle devrait être relativement au commencement (fig. 10).

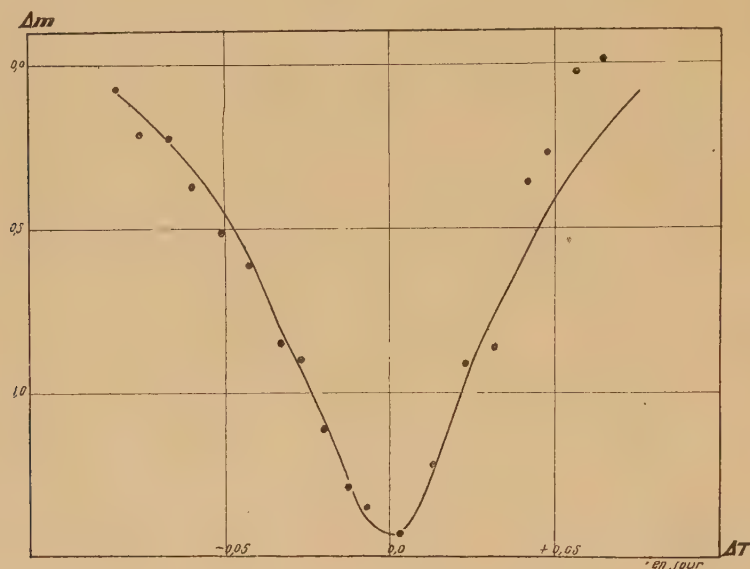


Fig. 10. — RZ CASSIOPEIAE.

Courbe théorique. Solution U. Eclipse principale.

Une cause des changements de forme de la courbe de lumière pourrait être une oscillation du retard de marée. Nous proposons une explication semblable pour de petits changements de durée de période de TV Cassiopeiae (Chapitre XII, Paragraphe 4).

5. — Éléments par la méthode de Harting. Hypothèse d'uniformité des disques.

Une moyenne entre les éléments de SHAPLEY, DUGAN, HODGEN, nous fait adopter pour point de départ :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,250 \\ a = 4,000 \\ i = 81^{\circ} \end{array} \right.$$

l'unité étant la projection du grand axe de la composante brillante, sans tenir compte du retard de marée, à l'instant d'un contact extérieur. La première courbe théorique donnant une éclipse beaucoup trop longue nous sommes obligé de modifier a et i ; d'où :

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,250 \\ a = 4,5822 \\ i = 81^{\circ}38' \end{array} \right.$$

Une seconde courbe théorique, tenant compte du retard de marée, ne donne qu'une dissymétrie, environ le 1/10 de celle révélée par l'observation. Nous sommes porté à éliminer les quatre points normaux décalés de fin d'éclipse cités plus haut et à ne tenir compte que de la branche descendante qui paraît la plus régulière. L'application des moindres carrés à l'équation de condition (25) (Chapitre II, paragraphe 7) nous donne les corrections :

$$dk = -0,164 \quad da = -0,2262 \quad di = +1^{\circ}8'$$

d'où les éléments définitifs :

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,086 \\ a = 4,3560 \\ i = 82^{\circ}46' \end{array} \right.$$

qui avec les intensités lumineuses pour chaque composante :

$$L_2 = 0,9598 \quad L_1 = 0,0402$$

nous permettent de tracer une courbe définitive satisfaisante. Le carré moyen des résidus $\frac{\Sigma \Delta \theta^2}{n}$ de 0,72 descend à 0,46.

L'excentricité conclue plus haut étant très faible $e = 0,013$ à $0,018$, nous nous sommes permis de la négliger et d'appliquer les calculs des deux derniers paragraphes comme pour une orbite circulaire.

6. — Hypothèse d'obscurcissement des disques.

Les équations de condition (25) (Chapitre II, paragraphe 7) seront utilisées avec de nouveaux résidus $\Delta \theta$ déterminés avec une courbe de lumière théorique obtenue en utilisant, à la place de la formule (1) (Chapitre I, paragraphe 3) la quantité de lumière perdue α_1 donnée par la table I_x de RUSSELL ⁽¹⁾ à l'aide de la fonction :

$$p(k, \alpha_1) = \delta - k$$

⁽¹⁾ Le k de la table I_x de RUSSELL correspond à $1/k$ de nos calculs.

δ étant la distance apparente des centres donnée par :

$$\delta^2 = 1 + k^2 - 2 k \cos (y-x)$$

Cette quantité α_1 est la fraction de lumière perdue pendant des phases partielles, l'unité étant la perte qu'il y aurait s'il y avait totalité. Pour obtenir la perte réelle, nous devons multiplier α_1 par un coefficient <1 , l'intensité lumineuse de la composante la plus faible ne pouvant pas être nulle. Nous sommes porté à adopter 0,8474 α_1 . Partant des éléments (b), les moindres carrés nous donnent les corrections :

$$dk = -0,0112 \quad da = -0,0341 \quad di = +4'$$

d'où les éléments définitifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 1,2388 \\ a = 4,5481 \\ i = 81^{\circ}42' \end{array} \right.$$

Le carré moyen des résidus $\frac{\Sigma \Delta \theta^2}{n}$ descend ainsi de 1,49 à 0,94.

7. — Discussion des solutions U et D .

Les points de la courbe théorique, les disques étant supposés uniformément lumineux (solution U), sont plus rapprochés de la courbe tirée directement des observations (branche descendante), que ceux de la courbe théorique partant de l'hypothèse d'obscureissement des disques (solution D). Nous avons pour moyennes du carré des résidus :

$$\left(\frac{\Sigma \Delta \theta^2}{n} \right)_U = 0,46 \quad \left(\frac{\Sigma \Delta \theta^2}{n} \right)_D = 0,94$$

D'autre part, une application de la formule de solution D :

$$Q(k, \alpha_0) = \frac{1 - \lambda_2}{\alpha_0 - (1 - \lambda_1)}$$

(α_0 = plus grande surface éclipsee au milieu de l'éclipse principale.)

avec la table 5 de RUSSELL nous donne une perte de lumière $1 - \lambda_2$ pour l'éclipse secondaire correspondant à une amplitude de 0,14 magnitude. Les observations ne montrant pas de minimum secondaire sensible, cette quantité théorique de la solution D est trop grande pour être acceptée. Celle de la solution U , 0,05 magnitude, est vraisemblable.

(¹) Le k de la table 5 de RUSSELL correspond à $1/k$ de nos calculs.

La présente discussion nous porte à conclure que *l'hypothèse de disques uniformément lumineux nous conduit à des résultats fort approchés de la vérité. L'hypothèse d'obscurcissement total des disques aux bords doit être éliminée.* La courbe théorique définitive est donnée par les fig. 9 et 10.

Eléments du système RZ Cassiopeiae.

Solution U

Demi grand axe de l'orbite	a	1.
Période	P	1,19525
Passage au périastre	T_0	J.J. 2419449,604
Milieu de l'éclipse	T	J.J. 2419449,492
Excentricité	e	0,018
Longitude du périastre (1912 E = 1752) ..	ω	125°
Réflexion de la grande composante	$2c$	0,030
Excès de brillance de la face avançante de la petite composante	$2b$	0,047
Intensité moyenne de la petite composante...	L_2	0,960
Intensité moyenne de la grande composante..	L_1	0,040
Retard de marée	α	45°50'
Durée de l'éclipse	D	0,180
Demi axes de la grande composante	a_1	0,255
(obscure)	b_1	0,248
Demi axes de la petite composante	a_2	0,234
(brillante)	b_2	0,228
Inclinaison du plan de l'orbite	i	82°46'
Rapport du rayon des composantes	k	0,921
Perte de lumière au minimum secondaire...		0,05
Rapport des brillances des deux composantes	J_2/J_1	14,0
Vitesse radiale du système	γ	— 41,00 Km. p. s.
Vitesse moyenne de la composante brillante autour du centre de gravité	K	68,08 Km. p. s.

CHAPITRE XI

U Cephei.

Eclipse totale. Orbite fortement elliptique. Retard de marée.

1. — Nous discutons 306 observations, faites du 26 mars 1931 au 19 juillet 1934. L'étoile de comparaison dont les rayons passaient par les prismes de notre photomètre à œil de chat était BD + 82°20. Extérieurement aux éclipses, l'objectif était diaphragmé pour affaiblir la lumière de la variable par rapport à l'étoile de comparaison. Des mesures faites sur des étoiles prises dans « *Revised Harvard Photometry* », nous font adopter 2,10 pour différence de magnitude apparente de la variable avec et sans diaphragme.

2. — Courbe de lumière observée.

Elle est obtenue avec 55 points normaux : moyennes de 4, 5 ou 6 observations ; en adoptant les éléments de GADOMSKI [62] :

$$m = J.J. 2423947,0282 + 2,4929409 E$$

Le milieu de l'éclipse serait en avance de 0 j. 05 sur les éphémérides. L'amplitude de variabilité serait en magnitude voisine de 2,20. La durée de constance d'éclat au minimum serait $d = 0 \text{ j. } 09 = 2 \text{ h. } 10 \text{ m.}$ Extérieurement à l'éclipse principale, il y aurait de petites oscillations irrégulières. Un minimum secondaire ressort en retard de 0 j. 3 sur l'équidistance entre deux minima principaux ; son amplitude est en magnitude voisine de 0,2.

3. — Décalage du minimum secondaire.

Nous discuterons ce dernier avant de calculer les éléments du système. Si nos observations sont vraies, il nous conduit à adopter $e \cos \omega = + 0,204$. Les éléments spectroscopiques de E. F. CARPENTER [63] donnent $e \cos \omega = + 0,429$ (34 spectrogrammes obtenus

à l'Observatoire de Lick, du 18 juillet 1923 au 5 juin 1925). Ces deux quantités sont de même signe, ce qui paraît une confirmation partielle. Des courbes de lumière de plusieurs observateurs semblent nous contredire. SHAPLEY [64], d'après les observations visuelles de WENDELL [65] (1895-1902) trouve un décalage de $+ 0 \text{ j. } 1$; ainsi que BAKER [66] photographiquement en 1915-18. La belle série visuelle de DUGAN [12] (1914-17) ne donne qu'un léger soupçon de faible décalage dans le même sens ; DUGAN s'est lui-même permis de le négliger considérant l'orbite circulaire. Ces dernières observations anciennes ne peuvent contredire les nôtres si nous rappelons que depuis ces époques la période s'est allongée de plus de 5 secondes ; d'où il est vraisemblable qu'il y ait eu des changements dans les éléments du système. Des travaux plus récents paraissent plus inquiétants : la série photographique de CARRASCO [67] (1929-32) donne un décalage voisin de $+ 0 \text{ j. } 1$; celle photo-visuelle de WALTER [18] (1931-32) montre deux points bas qui décident l'observateur à placer le minimum secondaire sans décalage. Examinant soigneusement les points, nous constatons qu'un second minimum secondaire, un peu moins profond, mais nettement visible, pourrait se placer au décalage $+ 0 \text{ j. } 3$, identique au nôtre. Des phénomènes d'ondulations étudiés par WALTER, ayant cause physique et cause de libration, pourraient résulter plusieurs minima secondaires ; il y aurait lieu de discuter lequel serait causé par une éclipse.

De la présente discussion, nous concluons l'hypothèse que notre minimum secondaire décalé de $+ 0 \text{ j. } 3$ est causé par une éclipse ; les raisons principales sont les suivantes :

- 1° L'accord de sens du décalage avec la spectroscopie ;
- 2° L'accord partiel avec les observations photométriques qui trouvent un décalage le trouvent dans le même sens que nous.

4. — Excentricité. Longitude du périastre.

Les éléments spectroscopiques de E. F. CARPENTER sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 2 \text{ j. } 4929507 \\ \gamma = -6,0 \pm 3,7 \text{ Km. p. s.} \\ K = 109,9 \pm 3,1 \text{ Km. p. s.} \\ e = 0,474 \pm 0,022 \\ \omega = 25^{\circ}0 \pm 3^{\circ}3 \\ T_0 = J.J. 2423966,644 \pm 0 \text{ j. } 014 \text{ (passage au périastre).} \end{array} \right.$$

Nous proposons de corriger l'excentricité e et la longitude du périastre ω en partant de la valeur $e \cos \omega = + 0,204$ donnée par notre courbe, et en tenant compte du décalage entre la phase spectroscopique $u = 90^{\circ}$ et le milieu de l'éclipse ; E. F. CARPENTER signale une avance de $T_m = 0 \text{ j. } 164$ de sa phase $u = 90^{\circ}$ sur les éléments de SHAPLEY, BAKER, DUGAN ; notre courbe donne une valeur presque semblable que nous adoptons $T_m = 0 \text{ j. } 159$.

Après plusieurs essais, nous proposons la méthode suivante : Nous calculons deux solutions limites donnant $e \cos \omega = + 0,204$; la première en maintenant e fixe ; la seconde ω fixe. Les résultats sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} e = 0,474 \\ \omega = 65^\circ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e = 0,226 \\ \omega = 25^\circ \end{array} \right.$$

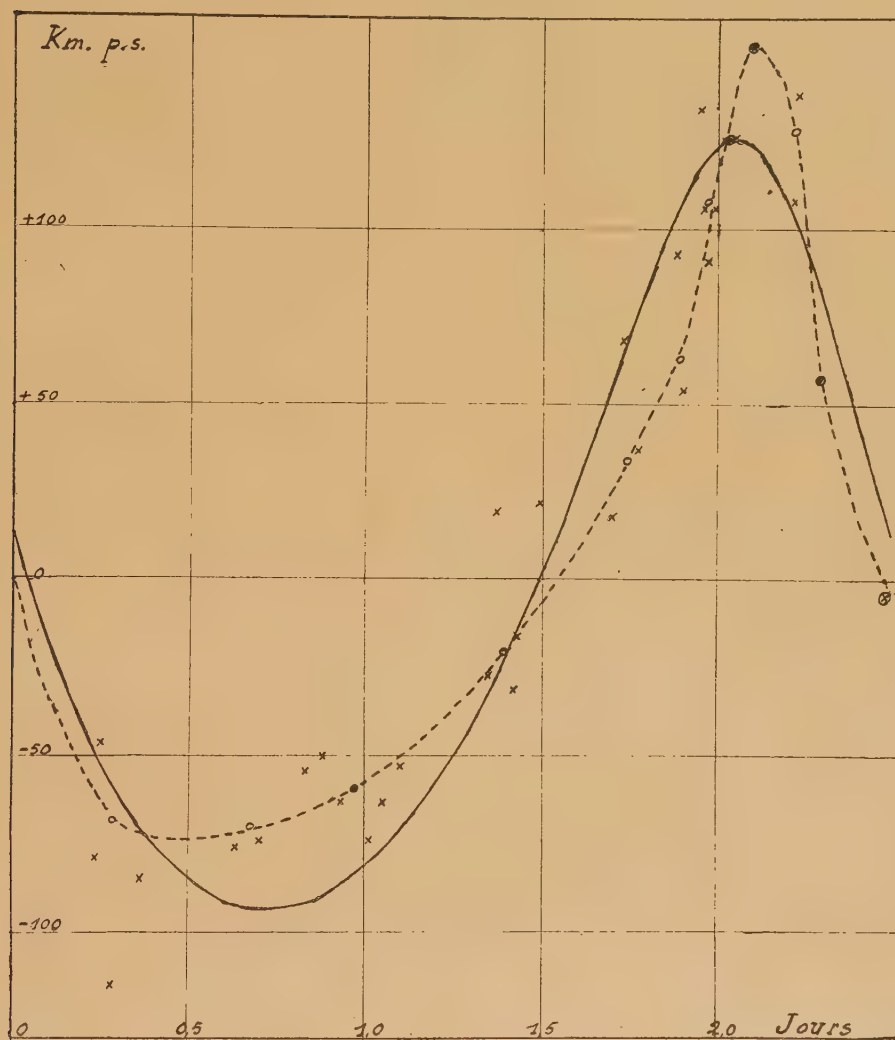


FIG. 11. — U CEPHEI. Courbes de vitesses radiales.

- × Observations de Carpenter.
- Vitesses radiales normales de Carpenter.
- Courbe théorique Ellsworth.
- - - Courbe théorique Carpenter.

Nous rejetons la première solution qui donnerait $T_m > 0 \text{ j. } 159$. La seconde est considérée plus probable donnant $T_m = 0,026$. Nous faisons ensuite varier ω ; puis e en fonction de ω maintenant $e \cos \omega$ fixe. Nous aboutissons ainsi à une solution définitive qui nous donne $T_m = 0,001$ (pratiquement nul) :

$$\left\{ \begin{array}{l} e = 0,211 \\ \omega = 15^\circ \end{array} \right.$$

Les nouveaux éléments spectroscopiques seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 2 \text{ j. } 4929409 \text{ (Période de GADOMSKI)} \\ \gamma = -6,0 \text{ Km. p. s.} \\ K = 109,9 \\ e = 0,211 \\ \omega = 15^\circ \\ T_0 = J.J. 2423966,599 \text{ (Passage au périastre).} \end{array} \right.$$

La courbe de vitesses radiales théorique déduite de ces derniers (fig. 11) ne s'écarte pas trop des observations de E. F. CARPENTER, sauf un peu après le minimum où elle est trop basse d'environ 25 Km. p. s. L'erreur moyenne d'une observation déduite des premiers éléments serait $\varepsilon = \pm 18,2 \text{ Km. p. s.}$; les nôtres donnent $\varepsilon = \pm 28,0 \text{ Km. p. s.}$ En supprimant deux observations très extérieures à notre courbe, nous aurions $\varepsilon = \pm 24,8 \text{ Km. p. s.}$ Tous ces écarts sont très grands ; mais E. F. CARPENTER fait lui-même remarquer la nécessité qu'il y aurait à refaire le travail avec un meilleur instrument.

5. — Courbe de lumière rectifiée.

Dans son travail sur le même astre, DUGAN part de la formule suivante :

$$(1) \quad L = a + b \sin \theta - c \cos \theta + d \sin 2\theta - e \cos 2\theta$$

L est l'éclairement reçu ; θ l'angle de phase ayant pour origine le milieu de l'éclipse principale ; b est le coefficient d'inégalité des faces, la face avançante de la composante brillante étant la plus lumineuse ; c est le coefficient de réflexion ; d et e sont deux coefficients d'où l'on tire l'ellipticité et le retard de marée. La formule de DUGAN ne peut être appliquée que si l'orbite est circulaire ; comme nous venons de prouver l'orbite fortement elliptique, nous modifions cette formule, partant de l'hypothèse que la rotation des composantes est uniforme et de même durée que leur translation. Nous mettons (1) sous la forme :

$$(2) \quad L = a - b \cos u - c \sin u + d \sin 2\theta - e \cos 2\theta$$

u étant la latitude de la composante brillante déduite de l'équation de KEPLER ⁽¹⁾, l'origine étant à son nœud ascendant. (2) a été mis numériquement sous forme de 23 équations

(1) Pratiquement, on fait usage des tables de F. SCHLESINGER et S. UDICK.

de condition qui furent résolues par les moindres carrés. Nous obtenons les résultats numériques :

$$\begin{aligned} a &= + 0,9810 \\ b &= + 0,0251 \\ c &= + 0,0713 \\ d &= + 0,0235 \\ e &= + 0,0107 \end{aligned}$$

6. — Coefficient d'ellipticité. Retard de marée.

Posons égalité :

$$(3) \quad d \sin 2 \theta - e \cos 2 \theta = - e_1 \cos (2 \theta + 2 \alpha)$$

dans laquelle e_1 sera le demi coefficient d'ellipticité de DUGAN et α l'angle du grand axe des ellipsoïdes par rapport au rayon vecteur au moment du milieu de l'éclipse principale ; c'est-à-dire le retard de marée. En appliquant (3) aux valeurs de $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$, on obtient :

$$\begin{aligned} e_1 &= 0,0258 \\ \alpha &= 32^\circ,7 \end{aligned}$$

Il est intéressant de rappeler que DUGAN avait trouvé un retard de marée de $+ 23^\circ,7$ en 1914-17. La différence avec le nôtre peut être causée par des erreurs ; mais si nous expliquons le non décalage du minimum secondaire de DUGAN par une coïncidence de la ligne des apsides avec la ligne de visée, une rotation des apsides ayant fait aboutir la longitude du périastre à la valeur que nous avons déterminée, il est théoriquement possible que notre retard de marée soit plus grand que celui de DUGAN ; notre éclipse principale étant un peu après le périastre (*hypothèse de rotation uniforme avec translation non uniforme*).

La formule (2) va devenir numériquement :

$$(4) \quad L = 0,9810 - 0,0251 \cos u - 0,0713 \sin u - 0,0258 \cos (2 \theta + 65^\circ,5).$$

La courbe rectifiée nous fait adopter les intensités lumineuses suivantes :

Extérieure aux éclipses	$1,00 \pm 0,084$
Constance au minimum	$0,22 \pm 0,015$
Composante brillante	$L_2 = 0,78$
Composante obscure	$L_1 = 0,22$
Perte au minimum secondaire	0,18

Extérieurement aux éclipses, il subsiste des oscillations irrégulières, ce qui nous porte à dire que nous n'avons pu rectifier la courbe que partiellement. WALTER avait abouti à

un résultat semblable, ce qui l'a porté à conclure l'existence d'effets de libration et effets physiques.

7. — Calcul des éléments par la méthode de Harting. Hypothèse des disques uniformément lumineux.

L'éclipse étant de courte durée relativement à la période, nous nous accordons le droit de supposer une orbite circulaire hypothétique de rayon A pouvant s'accorder avec les phases de l'éclipse. Prenant comme unité la projection du grand axe de l'ellipsoïde de la composante brillante, sur un plan perpendiculaire au rayon visuel, à l'instant du contact extérieur, sans tenir compte du retard de marée, k sera la même projection du grand axe de la composante obscure. Pour une première approximation, on a les relations :

$$\frac{D}{d} = \frac{k+1}{k-1} \quad A = \frac{P}{D} \cdot \frac{(1+k)}{\pi}$$

La courbe rectifiée nous fait donner à la durée de l'éclipse $D \cong 0,41$, et à la constante au minimum $d = 0,09$. On obtient les premiers éléments :

$$(a) \quad \begin{cases} A = 4,95 \\ k = 1,56 \\ i = 88^\circ \end{cases}$$

dans lesquels nous avons choisi $i < 90^\circ$ afin d'avoir $\operatorname{tg} i < \infty$. Une application des équations de condition (25) (chapitre II, paragraphe 7) nous donne $di = + 6^\circ 8$. Comme $di > 2^\circ$ est impossible, et que la correction à apporter à i est positive, nous sommes porté à remplacer les éléments (a) par les suivants, où il ne restera que A et k à corriger :

$$(b) \quad \begin{cases} A = 4,95 \\ k = 1,56 \\ i = 90^\circ \end{cases}$$

Les moindres carrés nous donnent les corrections :

$$\begin{aligned} dk &= + 0,2517 \\ dA &= + 0,6743 \end{aligned}$$

d'où il résulte les éléments définitifs pour la solution U :

$$(c) \quad \begin{cases} A = 5,6243 \\ k = 1,8117 \\ i = 90^\circ \end{cases}$$

Il nous reste à calculer, d'après la nouvelle valeur $A = 5,6243$ du cercle hypothé-

tique, une valeur du grand axe réel a de l'orbite elliptique. Nous avons la formule de RUSSELL [9] approximative :

$$A = (1 + e \sin \omega) a$$

Il en résulte $a = 5,3331$.

8. — Hypothèse de l'obscurcissement des disques.

La formule (1) (chapitre I, paragraphe 3) ne peut plus être appliquée. Nous la remplacerons par celle de la distance apparente des centres :

$$\delta^2 = 1 + k^2 - 2 k \cos (y - x)$$

Posant :

$$p(k, \alpha_1) = \delta - k$$

on cherche dans la table I_x de RUSSELL ⁽¹⁾ la fraction α_1 de lumière perdue pendant les phases partielles, la perte pendant la totalité étant l'unité. Avec ces quantités et les formules (2) et (6) (chapitre I, paragraphe 3), nous cherchons une seconde courbe théorique de première approximation qui nous permet de déterminer de nouvelles quantités $\Delta\theta$ qui seront appliquées à des équations de condition (25) (chapitre II, paragraphe 7). Le reste des calculs est semblable à ceux de l'hypothèse des disques uniformes. Un essai avec $i = 88^\circ$ nous donnant $di = + 19^\circ$, nous éliminons cette hypothèse pour revenir à $i = 90^\circ$, d'où il résulte les corrections :

$$dk = + 0,0093$$

$$dA = + 0,0340$$

et les éléments définitifs, solution D :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 4,9840 \\ k = 1,5693 \\ i = 90^\circ \end{array} \right. \quad \text{d'où } a = 4,7259$$

9. — Ellipticité des composantes.

Dans un important travail, WALTER [18] montre que le demi coefficient d'ellipticité visuel e (observations de DUGAN et de WALTER) est plus grand que le demi coefficient d'ellipticité photographique (observations de BAKER et de CARRASCO). Une moyenne du

⁽¹⁾ Le k de la table I_x de RUSSELL correspond à $1/k$ de nos calculs.

premier serait $e = 0,0132$; et du second $e = 0,0073$. Il conclut que e doit être principalement causé par la grande composante la moins lumineuse de type spectral K , l'autre étant de type A . Il est ainsi conduit à admettre que la petite composante brillante est sphérique, et la grande composante obscure ellipsoïdale. Le demi coefficient résultant de nos observations visuelles $e = 0,0107$ étant peu différent de la moyenne visuelle de WALTER $e = 0,0132$, nous maintiendrons sa conclusion pour le calcul des axes des composantes. Pour ce travail, nous faisons usage de la formule approchée de WALTER :

$$(13) \quad z = L_1 z_1 + L_2 z_2 + \frac{3}{4} L_1 L_2 (z_1 - z_2)^2$$

$z = 0,1545$ étant le facteur d'ellipticité de RUSSELL obtenu par la formule d'EDDINGTON, z_1 et z_2 sont les facteurs d'ellipticité propre de chaque composante. Posant $z_2 = 0$, on obtient $z_1 = 0,2229$ qui convient pour la solution U . Pour la solution D , on remplace z par Z , z_1 et z_2 par Z_1 et Z_2 ; et l'on obtient z_1 par la formule approchée de RUSSELL-SHAPLEY :

$$(14) \quad z_1 = \frac{5}{4} Z_1 - \frac{5}{28} Z_1^2$$

On obtient numériquement $z_1 = 0,2697$.

10. — Discussion des solutions U et D .

Des deux courbes théoriques calculées d'après ces derniers éléments, celle basée sur l'hypothèse de l'obscurcissement des disques s'accorde d'une façon satisfaisante avec l'en-

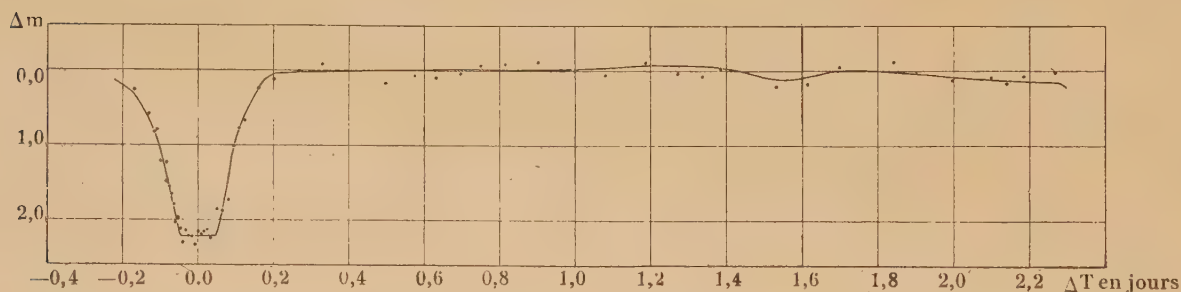


Fig. 12. — U CEPHEI.

Solution D. Orbite elliptique $e = 0,221$. $\omega = +15^\circ$

semble des observations ; celle partant des disques uniformes est trop basse par rapport aux observations du commencement et de la fin de l'éclipse. L'erreur moyenne en intensité lumineuse L d'un point normal, comprenant tous ceux compris dans l'éclipse serait

$\varepsilon_D = \pm 0,0269$ pour la première courbe et $\varepsilon_U = \pm 0,0298$ pour la seconde. La durée de constance d'éclat au minimum, calculée d'après la courbe D serait 2 h. 45 m. ; nous l'estimons 2 h. 50 m. sur la courbe rectifiée. D'après la courbe U , nous aurions 3 h. 5 m. La perte de lumière au minimum secondaire, d'après les éléments U serait 0,077, et d'après les éléments D , 0,120. La courbe rectifiée nous a donné 0,18 avec une erreur moyenne extérieure à l'éclipse principale $\pm 0,0779$. Le décalage avec U serait 0,103 et avec D , 0,060, donc pas invraisemblable. Rappelons que DUGAN avait conclu un obscurcissement du limbe de $2/3$, se basant sur la profondeur du minimum secondaire.

Les remarques qui précèdent : la plus petite erreur moyenne pour disques obscurcis ; durée de constance au minimum s'accordant bien avec les observations ; ainsi que la perte de lumière au minimum secondaire, nous conduisent à éliminer la solution U pour adopter D (fig. 12).

11. — Conclusions.

En associant notre courbe de lumière 1931-34 avec la courbe de vitesses radiales de CARPENTER, 1923-24, nous prouvons une forte excentricité $e = 0,211$ avec longitude du périastre $\omega = 15^\circ$. La rectification de courbe de lumière par la méthode de DUGAN, nous donne un coefficient d'ellipticité et un retard de marée voisins de ceux trouvés par DUGAN en 1914-17. Une application de la méthode de HARTING pour le calcul des éléments du système avec hypothèse de disques uniformément lumineux (solution U) ; puis hypothèse d'obscurcissement des disques (solution D) ; nous conduit à éliminer la première et adopter la seconde, après comparaison avec nos observations. Le coefficient d'ellipticité de nos observations étant voisin de moyennes visuelles déduites par WALTER, et éloignées de moyennes photographiques, nous concluons avec cet auteur que la petite composante brillante est sphérique (spectre A), et la grande composante obscure (spectre K) est ellipsoïdale avec coefficient $z_1 = 0,2697$. La courbe rectifiée paraissant ne l'être que partiellement, extérieurement aux éclipses (erreur moyenne $\pm 0,0779$ sans éclipse et $\pm 0,0269$ avec éclipse), ne contredit pas les effets de libration et les effets physiques étudiés par WALTER.

Eléments du système U Cephei.

Solution D

Demi grand axe de l'orbite	<i>a</i>	1.
Période (GADOMSKI)	<i>P</i>	2,4920409
Passage au périastre	<i>T</i> ₀	J.J. 2423966,596
Milieu de l'éclipse	<i>T</i>	J.J. 2423966,921
Excentricité	<i>e</i>	0,211
Longitude du périastre	ω	15°
Réflexion de la grande composante	<i>2 c</i>	0,143
Excès de brillance de la face avançante de la petite composante	<i>2 b</i>	0,050
Intensité moyenne de la petite composante ..	<i>L</i> ₂	0,78
Intensité moyenne de la grande composante ..	<i>L</i> ₁	0,22
Retard de marée	α	32°7
Durée de l'éclipse	<i>D</i>	0,425
Durée de la constance au minimum	<i>d</i>	0,115
Demi axes de la grande composante	<i>a</i> ₁	0,313
(obscur)	<i>b</i> ₁	0,267
Rayon de la petite composante (brillante) ...	<i>a</i> ₂	0,199
Inclinaison du plan de l'orbite	<i>i</i>	90°
Rapport du rayon des composantes	<i>k</i>	0,637
Perte de lumière au minimum secondaire ...		0,120
Rapport des brillances des deux composantes.	<i>J</i> ₂ / <i>J</i> ₁	8,67
Vitesse radiale du système (CARPENTER)	γ	— 6,0 Km. p. s.
Vitesse moyenne de la composante brillante autour du centre de gravité (CARPENTER).	<i>K</i>	109,9 Km. p. s.

CHAPITRE XII

TV Cassiopeiae.

Eclipse partielle. Orbite elliptique.

Rotation probable des apsides. Retard de marée.

1. — Adaptation des éléments spectroscopiques de Plaskett à une excentricité prouvée photométriquement.

Les observations photométriques faites avec précision montrent avec certitude un minimum secondaire légèrement en avance sur l'équidistance par rapport à deux minima principaux. La courbe de Mc DIARMID [68] tracée d'après les observations faites à Princeton Observatory avec un photomètre à polarisation entre 1912-15 donne $e \cos \omega = -0,010$; celle de JORDAN [69] tracée d'après des photographies extra-focales obtenues à Allegheny Observatory entre 1917-27 (principalement 1922-23) donne $e \cos \omega = -0,048$. Notre courbe tracée avec 187 observations faites avec notre photomètre à œil de chat nous conduit à $e \cos \omega = -0,100$. La variabilité de $e \cos \omega$ nous porte tout de suite à conclure l'existence d'une rotation de la ligne des apsides.

Spectroscopiquement, PLASKETT [70] part de l'hypothèse d'une orbite circulaire comme résultat de l'étude de 21 spectrogrammes obtenus de 1919 à 1921 à Allegheny Observatory. Il ne contredit pas l'excentricité déjà prouvée photométriquement par Mc DIARMID, mais juge ses propres observations spectroscopiques insuffisamment nombreuses pour la confirmer.

Guidé par les trois valeurs $e \cos \omega$ citées plus haut, nous essayons, en associant les documents spectroscopiques aux documents photométriques, de trouver pour l'époque de PLASKETT l'excentricité e et longitude du périastre ω les plus probables. Nous cherchons en premier lieu la valeur e qui donnerait une rotation des apsides uniforme ; après tâtonnement nous adoptons $e=0,160$. Jugeant le plus vraisemblable une rotation des apsides en sens direct, nous sommes conduit à admettre $\omega=104^\circ$. Ajoutant ces valeurs e et ω aux éléments spectroscopiques de PLASKETT, nous calculons une courbe de vitesses radiales qui nous paraît invraisemblable, principalement après le minimum des

vitesse où nous avons des résidus dépassant 30 Km. p. s. Même en déplaçant la courbe, nous ne pouvons éviter de forts résidus. *Nous rejetons l'hypothèse de rotation des apsides en sens direct pour essayer en sens rétrograde*, ce qui nous fait adopter $\omega = 256^\circ$. Après plusieurs essais nous obtenons une courbe satisfaisante après avoir modifié l'époque du milieu de l'éclipse de HELLERICH [71] de +0,050 et la vitesse radiale du centre de gravité du système de -3,16 Km. p. s. Le plus fort résidu ne dépasse pas 18 Km. p. s. Les éléments de première approximation sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P = 1,8126096 & (\text{HELLERICH-GADOMSKI}) \\ e = 0,160 \\ \omega = 256^\circ \\ T_m = \text{J.J. } 2420117,796 & (\text{HELLERICH } +0,050) \\ T_o = \text{J.J. } 2420118,632 \\ K = 87,92 \text{ Km. p. s.} \\ \gamma = +0,54 \text{ Km. p. s.} \end{array} \right.$$

Les moindres carrés nous conduisent aux corrections :

$$\begin{aligned} \delta e &= -0,085 \\ \delta \omega &= +3^\circ \\ \delta T_o &= +0,0224 \\ \delta K &= +0,818 \text{ Km. p. s.} \\ \delta \gamma &= +2,86 \text{ Km. p. s.} \end{aligned}$$

d'où les éléments définitifs :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P = 1,8126096 & (\text{HELLERICH-GADOMSKI}) \\ e = 0,075 \\ \omega = 259^\circ \\ T_m = \text{J.J. } 2420117,810 \\ T_o = \text{J.J. } 2420118,654 \\ K = 88,74 \text{ Km. p. s.} \\ \gamma = +0,20 \text{ Km. p. s.} \end{array} \right.$$

L'erreur moyenne d'une observation était d'après les éléments circulaires de PLASKETT, $\varepsilon_1 = \pm 5,816$ Km. p. s.; d'après nos éléments elliptiques ils deviennent $\varepsilon_1 = \pm 8,894$ Km p. s. *Nous concluons que ces éléments elliptiques nettement prouvés par la photométrie ne peuvent être contredits par la spectroscopie.*

La valeur $e=0,075$ rend invraisemblable $e \cos \omega = -0,100$ que nous avons trouvée. La remplaçant par $e \cos \omega = -0,075$, notre minimum secondaire n'est déplacé que de la quantité +0,025, pratiquement négligeable.

Nous devons signaler que l'époque du milieu de l'éclipse $u=90^\circ$, fournie par nos éléments spectroscopiques elliptiques est en retard de 0,064 jour d'après les éléments photométriques de HELLERICH ; alors que les éléments spectroscopiques circulaires de PLASKETT n'avaient qu'un retard négligeable de 0,007 jour. Ce désaccord semblerait

contredire nos éléments elliptiques. A cette critique, nous répondrons qu'une variabilité de durée de période probablement périodique et de courte durée signalée par GADOMSKI [72], plus tard confirmée par nous [73], montre que les minima photométriques avaient un retard en décroissance voisin de 0,020 jour en 1921-22. Il est vraisemblable qu'à

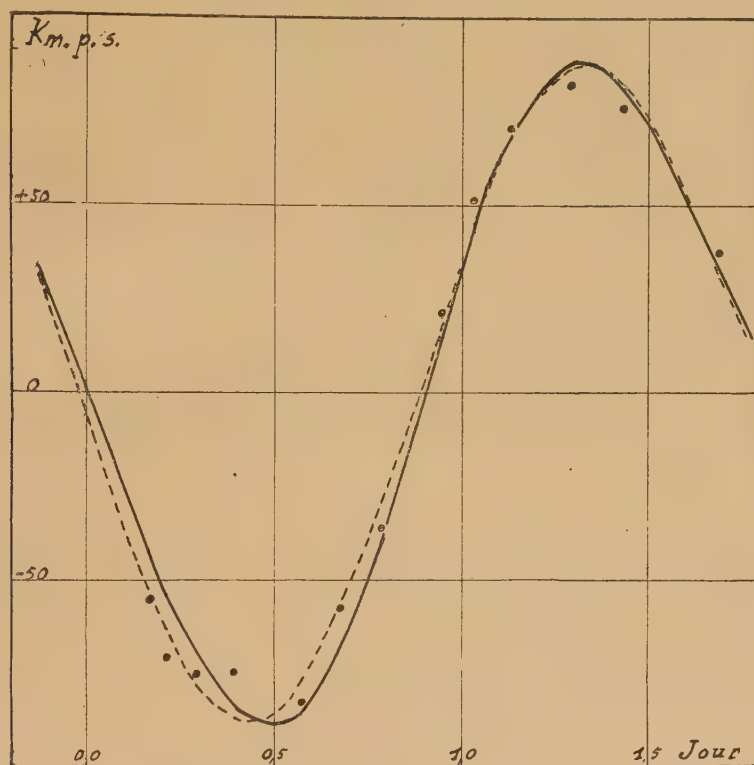


Fig. 13. — TV CASSIOPEIAE. Courbes de vitesses radiales.

————— Eléments elliptiques Ellsworth.
 - - - - - Eléments circulaires Plaskett.

l'époque moyenne de Plaskett (1920), ce retard atteignait 0,030 ; dans ces conditions, notre solution elliptique n'est plus contredite par la solution circulaire de PLASKETT ; —0,064 devenant —0,034 et —0,007 devenant +0,023.

Maintenant toujours la probabilité de rotation rétrograde des apsides, nous donnons dans le tableau suivant les variations de ω et $e \cos \omega$.

		$e \cos \omega$	ω
MC DIARMID	1914	—0,010	262°
PLASKETT	1920	(spectroscopie)	259°
JORDAN	1922-23	—0,048	230°
ELLSWORTH	1933	—0,075	180°

La rotation des apsides, sensiblement uniforme, en sens rétrograde, conduit à adopter la translation du système autour d'un troisième corps en une période voisine d'un siècle.

Il est possible qu'il existe un changement de durée de période séculaire donnant une formule avec terme sinusoïdal. S'il n'a pu encore être prouvé, il est possible que le fait soit causé par sa longue durée ; la partie sinusoïdale observée jusqu'à présent ayant été confondue avec une droite. Il est également possible que l'effet de rotation des apsides soit compensé par un effet d'aberration comme nous l'avons précédemment adopté pour expliquer les variations de période observées sur R Canis Majoris [43]. Les observations spectroscopiques et photométriques qui seront faites dans les temps futurs pourront seules résoudre ces problèmes.

2. — Courbe de lumière rectifiée.

Dix points normaux extérieurs aux éclipses sont utilisés pour tracer une courbe ; 14 points pris sur cette dernière serviront à calculer par les moindres carrés les coefficients de l'équation suivante de DUGAN :

$$L = a + b \sin \theta - c \cos \theta + d \sin 2\theta - e \cos 2\theta$$

En raison de l'excentricité appréciable que nous venons de trouver ($e=0,075$), chaque angle θ sera remplacé par $M+(\omega-\pi/2)$; M étant l'anomalie moyenne déduite des tables de SCHLESINGER à l'aide de l'anomalie vraie $v=u+\omega$ ($\omega=180^\circ$), $u=\theta+90^\circ$ étant l'anomalie excentrique. Nous obtenons ainsi la solution :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = +0,9531 \\ b = +0,0311 & \text{Inégalité des faces} \\ c = +0,0094 & \text{Réflexion} \\ d = +0,0122 & \text{Retard de marée} \\ e = +0,0310 & \text{et ellipticité} \end{array} \right.$$

L'équation suivante :

$$d \sin 2\theta - e \cos 2\theta = -e_1 \cos (2\theta + 2\alpha)$$

donne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_1 = +0,0333 & \text{Demi-coefficient d'ellipticité de Dugan} \\ \alpha = +10^\circ 44' & \text{Retard de marée} \end{array} \right.$$

EDDINGTON remplaçant la réflexion optique par un phénomène d'absorption et de réémission, nous conduit à adopter pour le facteur d'ellipticité z de RUSSELL :

$$z = 4 e_1 + 0,72 c = 0,1400$$

3. — Éléments par la méthode de Harting. Hypothèse d'uniformité des disques.

Nous partons des éléments suivants approchés de ceux de Mc DIARMID :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,05 \\ a = 3,50 \\ i = 77^{\circ} \end{array} \right.$$

l'unité étant la projection du grand axe de la composante brillante, sans tenir compte du retard de marée, à l'instant d'un contact extérieur. Une première courbe théorique donnant une éclipse beaucoup trop peu profonde, nous sommes porté à modifier l'inclinaison i . Les pertes de lumière déduites de courbe rectifiée sont : pour l'éclipse principale 0,52 L et pour l'éclipse secondaire 0,14 L ; $L = 1$ étant l'éclat du système extérieurement aux éclipses. La formule :

$$L_2 + L_1 = \pi (J_2 + k^2 J_1) = 1$$

où la brillance de chaque composante est J_2 et J_1 , et son intensité lumineuse L_1 et L_2 nous donne avec :

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{52}{14} = 3,714$$

$$L_2 = 0,7711 \quad L_1 = 0,2289$$

La perte de lumière de l'éclipse principale nous porte à adopter pour l'inclinaison $i = 81^{\circ}10,5$, d'où les éléments de première approximation.

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,05 \\ a = 3,50 \\ i = 81^{\circ}10,5 \end{array} \right.$$

La courbe théorique obtenue partant de ces derniers éléments montre *deux dissymétries causées par le retard de marée* : la première est relative à la plus grande surface éclipsee (phase $\theta = 0$; branche ascendante plus rapide que la branche descendante) ; la seconde est un retard de 0,0098 jour du minimum d'éclat sur la phase $\theta = 0$, la plus petite surface non éclipsee se montrant après la plus grande surface éclipsee en raison de la rotation sur un petit axe de l'ellipsoïde. L'addition de ces deux causes donne une courbe théorique s'accordant d'une façon satisfaisante avec la courbe nettement dissymétrique donnée par l'observation.

Le retard de 0,0098 jour nous paraît trop faible pour expliquer les décalages constatés entre $u = 90^{\circ}$ équivalent à $\theta = 0^{\circ}$ photométriques et spectroscopiques. Le dernier décalage qui subsiste, $-0,034$ jour, est d'ailleurs de sens inverse.

L'inclinaison i ayant déjà été corrigée ⁽¹⁾, nous chercherons à améliorer k et a en appliquant par les moindres carrés (25) (Chapitre II, paragraphe 7). Nous obtenons les corrections $dk = +0,0071$, $da = +0,0023$. Il en résulte les éléments définitifs :

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,0429 \\ a = 3,4977 \\ i = 81^{\circ}10',5 \end{array} \right.$$

Pour conserver la même perte de lumière maximum, nous devons admettre comme intensités lumineuses :

$$L_2 = 0,7854 \quad L_1 = 0,2146$$

et rapport des brillances :

$$J_2/J_1 = 3,981$$

La profondeur de l'éclipse secondaire n'est ainsi modifiée que d'une façon pratiquement négligeable. La somme des carrés des résidus de la courbe définitive est $\Sigma\Delta\theta'^2 = 5,84$, alors que pour la courbe première approximation elle était $\Sigma\Delta\theta'^2 = 7,46$.

4. — Discussion sur de courts changements de durée de période.

Les changements de durée de période trouvés par GADOMSKI, puis confirmés par nous (voir paragraphe 1) nous font adopter 0,02 jour pour amplitude des résidus avec une période de 2,7 années. Le retard de 0,01 jour sur la phase $\theta = 0$, causé par le retard de marée (voir paragraphe 3), diffère peu de cette amplitude de résidus. Il est vraisemblable qu'il y ait des changements dans le retard de marée ; ces derniers pourraient être cause de changements dans le retard du minimum qui nous préoccupe, et par suite de changements apparents dans la durée de période de la variable.

Nous ne faisons qu'ébaucher partiellement une explication de faits constatés.

5. — Hypothèse d'obscurcissement des disques.

Partant des éléments (b) et procédant comme pour RZ Cassiopeiae (Chapitre X, paragraphe 6), nous essayons de trouver trois corrections dk , da , di par les moindres carrés. Comme pour la solution U , la solution D fait aboutir à des résultats invraisemblables. Supposant, comme pour la solution U , $di=0$, nous aboutissons à $dk = -0,3583$,

⁽¹⁾ Un essai de calcul des trois corrections dk , da , di fait aboutir à des résultats invraisemblables : un numérateur très grand et un dénominateur très faible, voisin de la nullité.

$da = -0,8054$. Ces quantités jugées trop grandes sont rejetées. Nous essayons successivement avec $da=0$, $dk=0$. Nous obtenons les solutions suivantes :

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} dk = +0,1205 \\ da = 0 \\ di = -38' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,1705 \\ a = 3,5000 \\ i = 80^{\circ}32',5 \end{array} \right.$$

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} dk = 0 \\ da = -0,1328 \\ di = -13' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,0500 \\ a = 3,3672 \\ i = 80^{\circ}57',5 \end{array} \right.$$

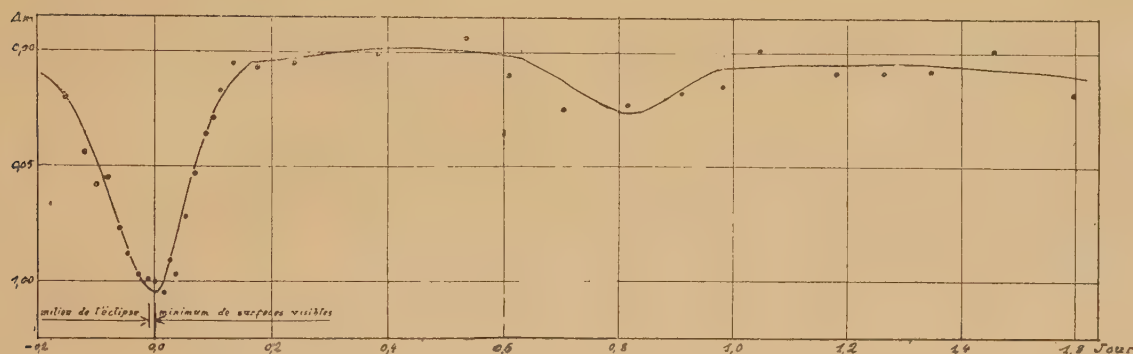


Fig. 14. — TV CASSIOPEIAE. Effet de retard de marée.

Elles paraissent toutes deux vraisemblables. Cependant pour choisir celle des deux qui conviendrait le mieux, nous calculons pour chacune la perte de lumière au minimum secondaire $1 - \lambda_2$ avec la formule :

$$Q(k, \alpha_0) = \frac{1 - \lambda_2}{\alpha_0 - (1 - \lambda_1)}$$

aidée de la table V de RUSSELL. $1 - \lambda_2$ est la perte au minimum principal et α_0 l'aire éclipsee au milieu de l'éclipse principale. Nous trouvons :

$$\begin{array}{ll} \text{pour (d)} & 1 - \lambda_2 = 0,117 \\ \text{et pour (e)} & 1 - \lambda_2 = 0,145. \end{array}$$

Nous donnons préférence à (e) qui est la solution qui s'accorde le mieux avec la courbe observée. La courbe théorique définitive de solution D donne un retard du minimum photométrique sur la phase $t=0$ (milieu de l'éclipse) qui confirme numériquement celui trouvé par la solution U et causé par le retard de marée. Nous trouvons pour somme du carré des résidus $\Sigma \Delta \theta^2 = 9,62$, alors qu'avec U nous avions 5,84.

6. — Comparaison des solutions U et D .

La forme générale des courbes de lumière U et D s'accorde avec les observations : éclipse principale et éclipse secondaire. La somme des carrés des résidus est plus grande pour D que pour U , mais peu. Supposant $di=0$, $dk=0$, $da=0$, nous trouvons trois solutions U acceptables, nous avons choisi $di=0$, ayant précédemment modifié i . Pour la solution D seulement $dk=0$ ou $da=0$ serait acceptable. De ces remarques, nous concluons que D est possible, mais U est plus probable.

Eléments du système TV Cassiopeiae.	Solution U	
Demi grand axe de l'orbite	a	1
Période (HELLERICH-GADOMSKI)	P	1,8126096
Passage au périastre	T_0	J.J. 2420118,654
Milieu de l'éclipse	T	J.J. 2420117,810
Excentricité	e	0,075
Longitude du périastre (1920)	ω	259°
Réflexion de la grande composante	$2c$	0,019
Excès de brillance de la face avançante de la petite composante	$2b$	0,062
Intensité moyenne de la petite composante ..	L_2	0,785
Intensité moyenne de la grande composante.	L_1	0,215
Retard de marée	α	10°44'
Durée de l'éclipse	D	0,355
Demi-axes de la grande composante	a_1	0,313
(obscur)	b_1	0,290
Demi-axes de la petite composante	a_2	0,300
(brillante)	b_2	0,278
Inclinaison du plan de l'orbite	i	81°10',5
Rapport du rayon des composantes	k	0,959
Perte de lumière au minimum secondaire ..		0,13
Rapport des brillances des deux composan- tes	J_2/J_1	3,981
Vitesse radiale du système	γ	+0,20 Km. p. s.
Vitesse moyenne de la composante brillante autour du centre de gravité	K	88,74 Km. p. s.

Observations

W Ursae Minoris. — Points normaux. ⁽¹⁾

ΔT = Phase en Jours d'après les éléments adoptés définitivement.

n = Nombre d'observations utilisées.

Δm = Différence de magnitude ; 0,00 correspondant à la magnitude de moyenne extérieure aux éclipses.

$O - C$ = Résidus d'après la courbe théorique définitive (Solution *U*).

ΔT	n	Δm	$O - C$	ΔT	n	Δm	$O - C$
—0,165	5	+0,05	—0,02	+0,173	7	+0,05	+0,05
—0,117	5	+0,09	—0,02	+0,262	4	+0,01	+0,04
—0,103	5	+0,15	0,00	+0,324	5	0,00	+0,04
—0,085	5	+0,25	0,00	+0,394	4	—0,07	—0,02
—0,067	5	+0,43	+0,04	+0,483	5	—0,04	0,00
—0,046	5	+0,53	+0,01	+0,549	5	—0,04	—0,01
—0,026	5	+0,64	—0,03	+0,641	6	+0,01	+0,01
—0,012	5	+0,76	0,00	+0,748	6	+0,04	0,00
+0,007	7	+0,80	+0,05	+0,818	5	+0,12	+0,02
+0,021	5	+0,60	—0,09	+0,928	5	+0,06	—0,02
+0,037	6	+0,39	—0,20	+1,076	5	+0,05	+0,02
+0,053	4	+0,44	0,00	+1,213	5	+0,02	0,00
+0,087	4	+0,31	+0,10	+1,311	6	+0,01	—0,01
+0,099	5	+0,14	—0,01	+1,358	5	0,00	—0,03
+0,131	5	+0,02	—0,02	+1,431	5	+0,06	+0,01

(1) La liste d'observations de cette étoile a précédemment été publiée [47].

RZ Cassiopeiae (Type spectral = A₂).

Observations faites avec le photomètre à œil de chat.

Etoile de comparaison : Cassiopeiae (Type spectral = A₃).

J.J. = Epoque de l'observation indiquée en jours juliens et temps moyen héliocentrique de Greenwich.

ΔT = Phase d'après les éléments de Graff, Mergentaler.

Δm = Différence de magnitude ; 0,00 correspondant à l'ouverture de 2 cm. de l'œil de chat.

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2426			2426		
415,337	—0,097	0,12	467	—0,027	0,97
359	—0,075	0,21	485	—0,009	1,29
369	—0,065	0,48	504	+0,010	1,36
388	—0,046	0,73	519	+0,025	0,82
406	—0,028	1,22	534	+0,040	0,55
427	—0,007	1,69	764,370	—0,077	0,04
462	+0,028	1,22	387	—0,060	0,27
482	+0,048	0,65	406	—0,041	0,61
507	+0,073	0,09	430	—0,017	1,09
526	+0,092	0,06	498	+0,051	0,45
623,374	—0,033	0,88	954,356	+1,060	0,45
389	—0,018	1,21	367	+1,071	0,42
405	—0,002	1,43	381	+1,085	0,50
422	+0,015	1,22	397	—0,094	0,51
438	+0,031	0,58	417	—0,074	0,54
455	+0,048	0,47	434	—0,057	0,73
471	+0,064	0,24	452	—0,039	0,98
488	+0,081	0,03	956,376	+0,689	0,33
752,357	+1,058	0,12	957,416	+0,534	0,36
373	+1,074	0,04	961,400	+0,932	0,20
386	+1,087	0,14	970,383	+0,353	0,12
404	—0,090	0,24	972,339	—0,081	0,12
418	—0,076	0,25	347	—0,073	0,06
432	—0,062	0,34	355	—0,065	0,15
450	—0,044	0,55	367	—0,053	0,47

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2426			2427		
380	—0,040	0,73	507	+0,071	0,01
398	—0,022	0,89	255,454	+0,955	0,09
441	—0,009	1,40	272,432	+0,004	1,55
985,373	+1,000	0,44	443	+0,015	1,55
394	+1,021	0,22	456	+0,028	1,22
986,420	+0,852	0,12	467	+0,039	1,02
2427			313,484	+0,418	0,16
006,410	+0,523	0,18	318,447	+0,600	0,20
014,436	+0,182	0,07	321,368	—0,065	0,35
015,378	—0,071	0,34	378	—0,055	0,52
387	—0,062	0,42	388	—0,045	0,78
398	—0,051	0,72	399	—0,034	1,16
409	—0,040	0,82	330,442	+0,642	0,06
423	—0,026	1,10	331,463	+0,468	0,01
434	—0,015	1,26	332,475	+0,285	—0,01
445	—0,004	1,38	333,367	—0,019	1,17
457	+0,008	1,48	379	—0,007	1,50
475	+0,026	1,13	389	+0,003	1,60
487	+0,038	0,69	400	+0,014	1,36
502	+0,053	0,36	412	+0,026	0,92
514	+0,065	0,22	432	+0,046	0,35
016,462	+1,013	0,04	447	+0,061	0,06
017,435	+0,791	0,05	568,426	+0,771	0,06
097,505	+0,779	0,09	569,427	+0,577	0,14
118,294	+0,053	0,28	571,483	+0,243	0,05
309	+0,068	0,11	577,468	+0,251	0,15
119,377	—0,059	0,20	580,468	+0,861	0,11
388	—0,048	0,26	582,473	+0,475	0,05
397	—0,039	0,56	586,474	+0,891	0,10
408	—0,028	0,92	597,428	+1,087	0,07
419	—0,017	1,32	599,489	+0,758	0,11
429	—0,007	1,58	603,438	—0,074	0,13
441	+0,005	1,55	479	—0,033	0,77
452	+0,016	1,38	488	—0,024	1,05
462	+0,026	1,18	498	—0,014	1,24
472	+0,036	0,73	509	—0,003	1,09
479	+0,043	0,43	604,498	+0,986	0,08
487	+0,051	0,18	605,537	+0,830	0,08
497	+0,061	0,12	606,441	+0,538	0,09

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2427			2427		
620,513	+0,268	0,32	398	+0,509	0,16
623,503	+0,867	0,23	484	+0,595	0,12
624,446	+0,615	0,10	711,370	+0,285	0,12
520	+0,689	0,11	718,432	+0,176	0,13
628,466	+1,049	0,10	464	+0,208	0,14
630,464	+0,656	0,09	719,365	—0,086	0,12
635,434	+0,845	0,27	372	—0,079	0,33
488	+0,899	0,20	380	—0,071	0,58
636,500	+0,716	0,06	397	—0,054	0,65
637,487	+0,508	0,15	406	—0,045	0,71
678,366	+0,748	0,30	419	—0,032	0,74
683,383	+0,984	0,19	428	—0,023	1,01
445	+1,046	0,14	438	—0,013	1,43
684,420	+0,826	0,14	448	—0,003	1,52
460	+0,866	0,17	459	+0,018	1,48
687,400	+0,220	0,14	469	+0,027	1,07
447	+0,267	0,13	478	+0,038	0,78
691,396	+0,631	0,29	719,489	+0,038	0,52
442	+0,677	0,24	499	+0,048	0,30
692,416	+0,455	0,14	510	+0,059	0,11
693,356	+0,200	0,13	521	+0,070	0,04
402	+0,246	0,13	721,394	+0,747	0,10
695,338	+0,987	0,12	722,409	+0,567	0,14
405	+1,054	0,13	455	+0,613	0,17
696,400	+0,854	0,10	495	+0,653	0,12
492	+0,946	0,10	735,429	+0,439	0,17
704,392	+0,479	0,14	736,397	+0,212	0,12
707,431	—0,068	0,21	527	+0,342	0,06
708,378	+0,879	0,18	743,410	+0,054	0,18
428	+0,929	0,11	419	+0,063	0,10
478	+0,979	0,13	470	+0,114	0,10
709,383	+0,689	0,14	480	+0,124	0,02
474	+0,780	0,08	746,399	+0,652	0,06
710,351	+0,462	0,10			

RZ Cassiopeiae. — Points normaux.

ΔT = Phase en jours d'après les éléments adoptés définitivement.

n = Nombre d'observations utilisées.

Δm = Différence de magnitude ; 0,00 correspondant à la magnitude moyenne entre l'éclipse principale et l'éclipse secondaire.

$O - C$ = Résidus d'après la courbe théorique définitive la plus probable (Solution U).

ΔT	n	Δm	$O - C$	ΔT	n	Δm	$O - C$
—0,083	5	+0,07	—0,01	+0,065	4	—0,01	—0,22
—0,076	6	+0,21	+0,07	+0,100	4	—0,03	—0,05
—0,067	6	+0,22	—0,01	+0,197	6	+0,02	+0,01
—0,060	5	+0,37	+0,06	+0,252	5	+0,06	+0,05
—0,051	6	+0,51	+0,07	+0,288	4	—0,03	—0,04
—0,043	6	+0,61	+0,03	+0,450	6	0,00	—0,01
—0,034	6	+0,85	+0,04	+0,519	6	+0,09	+0,08
—0,027	5	+0,90	—0,03	+0,594	6	+0,06	0,00
—0,020	5	+1,11	+0,02	+0,646	6	+0,02	—0,02
—0,013	5	+1,29	+0,01	+0,710	6	+0,07	+0,05
—0,007	5	+1,35	—0,04	+0,773	5	—0,02	—0,04
+0,003	5	+1,43	0,00	+0,838	5	+0,04	—0,01
+0,013	6	+1,22	—0,02	+0,874	6	+0,06	+0,01
+0,023	6	+0,91	—0,04	+0,937	4	+0,05	—0,02
+0,032	6	+0,86	+0,10	+0,984	5	+0,09	+0,02
+0,042	6	+0,36	—0,19	+1,034	5	+0,03	—0,05
+0,048	6	+0,27	—0,18	+1,067	5	+0,21	+0,12
+0,057	6	+0,03	—0,28	+1,095	5	+0,12	+0,04

U Cephei.

Types spectraux : Composante principale : A_0 .

Composante secondaire : K_0 .

Observations faites avec le photomètre à œil de chat.

Etoile de comparaison : BD + 82°20 (Type spectral = A_2).

$J.J.$ = Epoque de l'observation indiquée en Jours Juliens et temps moyen héliocentrique de Greenwich.

ΔT = Phase d'après les éléments de GADOMSKI.

Δm = Différence de magnitude ; 0,00 correspondant à l'ouverture de 2 cm. de l'œil de chat et diaphragme devant l'objectif.

$J.J.$	ΔT	Δm	$J.J.$	ΔT	Δm
2426			2426		
427,407	—0,097	2,02	407	—0,054	2,66
434	—0,070	2,36	439	—0,022	2,56
450	—0,054	2,58	457	—0,004	2,46
471	—0,033	2,64	478	+0,017	2,33
492	—0,012	2,66	624,382	—0,065	2,71
516	+0,012	2,64	402	—0,045	2,82
534	+0,030	2,41	421	—0,016	2,99
552	+0,048	2,16	454	+0,007	2,90
594,360	—0,170	0,27	472	+0,025	2,78
376	—0,154	0,42	496	+0,049	2,27
394	—0,137	0,52	511	+0,064	1,66
412	—0,119	0,77	786,385	—0,103	2,11
609,370	—0,119	1,37	396	—0,092	2,22
387	—0,101	1,46	409	—0,079	2,53
409	—0,080	2,32	422	—0,066	2,87
429	—0,060	2,61	439	—0,045	3,04
448	—0,041	2,81	456	—0,028	2,95
614,345	—0,130	1,14	473	—0,013	2,88
375	—0,100	2,05	489	+0,005	2,87
392	—0,083	2,24	506	+0,022	2,80
407	—0,068	2,42	841,397	+0,064	2,54
424	—0,051	2,66	411	+0,078	2,28
441	—0,034	2,68	423	+0,090	1,76
459	—0,016	2,71	440	+0,107	1,51
476	+0,001	2,77	460	+0,127	1,34
495	+0,020	2,60	968,354	—0,119	0,93
619,320	—0,141	0,97	366	—0,107	1,18
346	—0,115	1,20	378	—0,095	1,39
362	—0,099	1,62	391	—0,082	1,96
385	—0,076	2,05	400	—0,073	2,04

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2426			2427		
411	—0,064	2,38	357	—0,072	2,01
423	—0,050	2,48	364	—0,065	2,05
436	—0,037	2,54	371	—0,058	2,13
450	—0,023	2,59	382	—0,047	2,20
464	—0,009	2,60	392	—0,037	2,44
479	+0,006	2,52	401	—0,028	2,44
495	+0,022	2,47	413	—0,016	2,56
2427			423	—0,006	2,30
006,467	+0,600	0,55	161,425	+0,996	0,12
008,439	+0,079	1,93	164,435	+0,513	0,36
452	+0,092	1,30	464	+0,542	0,18
463	+0,103	0,92	165,334	—0,081	2,06
013,350	+0,004	2,72	346	—0,069	2,15
361	+0,015	2,72	355	—0,060	2,45
374	+0,028	2,65	366	—0,049	2,65
388	+0,042	2,50	377	—0,038	2,76
405	+0,059	2,17	382	—0,033	2,64
420	+0,074	1,71	390	—0,025	2,48
436	+0,090	1,29	400	—0,015	2,49
015,449	+2,103	0,87	411	—0,004	2,53
017,453	+1,615	0,83	421	+0,006	2,44
120,431	—0,110	1,05	431	+0,016	2,39
130,400	—0,114	1,50	167,363	+1,948	0,63
412	—0,102	1,82	399	+1,984	0,49
426	—0,088	2,01	168,461	+0,553	0,49
442	—0,072	2,04	178,381	+0,501	0,82
453	—0,061	2,17	390	+0,514	0,63
465	—0,049	2,46	179,433	+1,553	0,80
153,511	+0,561	0,24	184,393	+1,528	0,62
155,308	—0,135	0,80	402	+1,537	0,58
321	—0,122	1,38	445	+1,580	0,67
396	—0,047	2,54	186,388	+1,030	0,71
408	—0,035	2,66	440	+1,082	0,54
417	—0,026	2,61	454	+1,096	0,58
427	—0,016	2,65	197,443	+2,113	0,84
439	—0,004	2,57	212,463	+2,175	0,61
450	+0,007	2,33	225,438	+0,193	0,60
461	+0,018	2,14	447	+0,202	0,53
156,411	+0,968	0,55	227,400	+2,155	0,74
447	+1,004	0,44	228,438	+0,700	0,55
160,348	—0,081	1,76	232,414	+2,183	0,64

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2427			2427		
233,402	+0,678	0,34	527,480	+0,549	0,65
255,442	+0,281	0,60	534	+0,643	0,63
287,414	—0,155	1,18	539,372	+0,016	2,84
450	—0,119	1,63	390	+0,034	2,80
312,386	—0,112	1,36	413	+0,057	2,53
414	—0,084	1,49	417	+0,061	2,24
426	—0,072	2,06	440	+0,084	1,40
435	—0,065	2,15	541,353	+1,997	0,60
457	—0,041	2,23	395	+2,039	0,35
470	—0,028	2,48	423	+2,067	0,34
483	—0,015	2,54	466	+2,110	0,20
499	+0,001	2,49	542,367	+0,519	0,42
522	+0,024	2,55	398	+0,550	0,45
536	+0,038	2,36	543,375	+1,527	0,56
313,430	+0,932	0,29	461	+1,613	0,56
318,435	+0,951	0,59	545,382	+1,040	0,24
330,460	+0,511	0,50	474	+1,132	0,22
331,450	+1,501	0,47	488	+1,146	0,18
332,363	—0,079	1,92	559,358	+0,058	2,57
374	—0,068	2,26	369	+0,069	2,41
383	—0,059	2,19	378	+0,078	2,31
392	—0,050	2,47	390	+0,090	1,30
399	—0,043	2,65	404	+0,104	1,14
426	—0,016	2,58	417	+0,117	0,97
436	—0,006	2,41	441	+0,141	0,79
444	+0,002	2,35	451	+0,151	0,63
457	+0,015	2,19	475	+0,175	0,49
490	+0,048	2,02	484	+0,184	0,52
479,407	—0,118	0,78	564,390	+0,105	1,37
417	—0,108	0,96	436	+0,151	0,87
427	—0,098	1,41	465	+0,180	0,67
438	—0,087	1,50	566,371	+2,086	0,70
450	—0,075	1,72	405	+2,120	0,65
464	—0,061	2,26	567,369	+0,591	0,52
473	—0,052	2,37	395	+0,617	0,39
487	—0,038	2,47	424	+0,646	0,36
495	—0,030	2,30	464	+0,686	0,39
490,486	+0,989	0,45	568,392	+1,614	0,44
505,467	+1,012	0,31	406	+1,628	0,35
526,489	+2,091	0,57	501	+1,723	0,27
546	+2,148	0,61	569,366	+0,095	1,36

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2427			2427		
374	+0,103	1,07	604,414	+0,242	0,64
386	+0,115	0,80	473	+0,301	0,34
395	+0,124	0,71	518	+0,346	0,24
409	+0,138	0,55	605,423	+1,251	0,68
446	+0,175	0,49	453	+1,281	0,43
497	+0,226	0,26	529	+1,357	0,37
571,401	+2,130	0,35	606,400	+2,228	0,48
573,390	+1,626	0,42	462	+2,290	0,23
424	+1,665	0,30	611,429	+2,271	0,78
474	+1,710	0,36	460	—0,191	0,83
576,378	+2,121	0,46	504	—0,147	0,95
529	+2,272	0,27	550	—0,101	1,21
577,373	+0,623	0,51	615,489	+1,345	0,57
440	+0,718	0,36	620,412	+1,282	0,46
514	+0,764	0,26	464	+1,334	0,49
580,390	+1,147	0,34	503	+1,373	0,31
456	+1,213	0,19	528	+1,398	0,46
582,403	+0,667	0,43	621,435	—0,188	0,77
466	+0,730	0,15	490	—0,133	0,51
525	+0,789	0,26	535	—0,088	1,48
585,398	+1,169	0,29	622,429	+0,806	0,36
485	+1,256	0,19	485	+0,862	0,23
589,387	+2,158	0,35	623,391	+1,768	0,52
423	+2,194	0,36	449	+1,826	0,24
489	+2,260	0,52	496	+1,873	0,24
594,471	+0,270	0,34	624,394	+0,278	0,42
536	+0,335	0,30	480	+0,364	0,13
596,410	+2,209	0,33	530	+0,414	0,36
509	—0,185	0,22	626,425	—0,184	0,93
597,394	+0,699	0,46	627,455	+0,846	0,28
419	+0,725	0,44	628,414	+1,805	0,47
472	+0,778	0,27	478	+1,869	0,23
599,423	+0,236	0,49	630,450	+1,348	0,20
464	+0,277	0,35	635,405	+1,317	0,77
600,424	+1,237	0,52	445	+1,357	0,29
508	+1,321	0,37	503	+1,415	0,44
602,414	+0,734	0,48	636,465	—0,116	1,10
453	+0,773	0,32	637,429	+0,848	0,19
512	+0,832	0,36	472	+0,891	0,14
603,429	+1,749	0,48	530	+1,009	0,24
518	+1,838	0,19	638,395	+1,814	0,29

U Cephei. — Points normaux.

ΔT = Phase en Jours d'après les éléments adoptés définitivement.

n = Nombre d'observations utilisées.

Δm = Différence de magnitude ; 0,00 correspondant à la magnitude moyenne extérieure aux éclipses.

$O - C$ = Résidus d'après la courbe théorique définitive (solution D).

ΔT	n	Δm	$O - C$	ΔT	n	Δm	$O - C$
—0,170	7	+0,26	—0,08	+0,123	5	+0,67	+0,07
—0,132	6	+0,58	—0,08	+0,160	6	+0,24	0,00
—0,115	5	+0,82	0,00	+0,202	5	+0,12	+0,08
—0,110	5	+0,79	—0,10	+0,266	5	+0,01	—0,01
—0,101	5	+1,22	+0,12	+0,330	5	—0,08	—0,10
—0,094	6	+1,23	—0,16	+0,497	5	+0,17	+0,17
—0,085	5	+1,48	+0,06	+0,574	5	+0,07	+0,07
—0,075	5	+1,55	0,00	+0,631	5	+0,09	+0,11
—0,071	5	+1,65	—0,01	+0,697	5	+0,03	+0,05
—0,065	6	+1,79	—0,04	+0,750	5	—0,07	—0,05
—0,060	5	+2,03	+0,08	+0,815	5	—0,09	—0,08
—0,054	5	+1,96	—0,09	+0,902	5	—0,11	—0,10
—0,046	5	+2,12	—0,08	+1,001	5	0,00	+0,01
—0,041	5	+2,30	+0,08	+1,081	5	+0,06	+0,10
—0,033	5	+2,14	—0,08	+1,187	5	—0,10	—0,04
—0,026	5	+2,21	—0,01	+1,272	4	+0,04	+0,11
—0,016	5	+2,22	0,00	+1,338	5	+0,08	+0,13
—0,009	5	+2,33	+0,11	+1,385	5	—0,03	+0,01
+0,001	5	+2,16	—0,06	+1,534	5	+0,21	+0,09
+0,009	5	+2,19	—0,03	+1,615	5	+0,18	+0,10
+0,016	5	+2,16	—0,06	+1,700	5	—0,05	—0,05
+0,024	6	+2,13	—0,09	+1,842	6	—0,12	—0,14
+0,033	5	+2,24	+0,03	+1,997	4	+0,12	+0,04
+0,050	5	+1,86	—0,30	+2,098	4	+0,09	—0,04
+0,065	6	+1,88	+0,01	+2,140	5	+0,16	+0,05
+0,081	5	+1,73	+0,26	+2,189	5	+0,06	—0,07
+0,094	5	+1,01	0,00	+2,269	5	+0,02	—0,13
+0,107	5	+0,77	—0,01				

TV Cassiopeiae. (Type spectral = A_0).

Observations faites avec le photomètre à œil de chat.

Etoile de comparaison : β Cassiopeiae (type spectral = F_5).

$J.J.$ = Epoque de l'observation indiquée en jours juliens et temps moyen héliocentrique de Greenwich.

ΔT = Phase d'après les éléments de HELLERICH-GADOMSKI.

Δm = Différence de magnitude ; 0,00 correspondant à l'ouverture de 2 cm. de l'œil de chat.

$J.J.$	ΔT	Δm	$J.J.$	ΔT	Δm
2426			2426		
601,399	—0,052	0,64	399	+0,106	0,68
418	—0,033	0,85	433	+0,140	0,61
439	—0,012	0,97	097,467	+1,174	0,69
461	+0,010	0,79	104,310	+0,766	0,27
630,397	—0,056	1,27	117,447	+1,215	0,64
418	—0,035	1,40	118,430	+0,385	0,54
436	—0,017	1,35	120,389	+0,532	0,29
456	+0,004	1,24	129,392	+0,472	0,33
693,473	+1,392	0,63	227,416	+0,615	0,64
694,490	+0,596	0,90	228,452	+1,651	1,08
708,412	+0,017	1,82	232,424	+1,185	0,68
433	+0,038	1,40	233,412	+1,173	0,55
469	+0,074	0,85	259,389	—0,039	1,40
722,385	+1,302	0,55	401	—0,027	1,52
729,468	+1,134	0,77	416	—0,012	1,63
750,298	+0,213	0,48	427	—0,001	1,66
956,417	+1,507	0,75	440	+0,012	1,53
957,364	+0,642	1,03	452	+0,024	1,41
394	+0,672	0,62	464	+0,036	1,22
967,372	+1,587	0,68	478	+0,050	1,05
970,363	+0,952	0,80	496	+0,068	0,73
2427			507	+0,079	0,61
055,421	+0,818	0,58	261,464	+0,224	0,79
074,560	+0,018	0,91	262,446	+1,206	0,71
075,446	+0,904	0,76	288,444	+0,014	1,74
080,494	+0,514	0,38	313,371	+1,377	0,69
096,383	+0,090	0,78	316,394	+0,775	0,62

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2427			2427		
318,407	+0,975	0,61	505,422	+1,291	0,70
320,358	+1,114	0,73	541,361	+0,978	0,31
330,356	+0,227	0,70	543,434	+1,239	0,74
331,374	+1,254	0,59	545,398	+1,390	0,50
352,475	+0,604	0,24	567,387	+1,628	0,83
355,487	—0,010	1,69	472	—0,100	0,88
520	+0,023	0,96	568,470	+0,898	0,19
555	+0,058	0,72	569,461	+0,077	1,10
356,472	+0,975	0,76	484	+0,100	0,56
359,453	+0,331	0,59	573,417	+0,407	0,61
360,459	+1,337	0,85	576,464	+1,642	0,61
361,479	+0,545	0,67	577,431	+0,796	0,96
363,462	+0,715	0,71	580,410	+0,150	0,78
364,307	+1,560	1,21	582,419	+0,346	0,76
404	+1,657	1,19	585,442	+1,557	0,42
430	+1,683	1,58	586,405	+0,707	0,80
364,453	—0,107	1,21	587,391	—0,120	0,93
491	—0,069	1,26	592,400	+1,264	0,79
512	—0,048	1,82	594,518	+1,570	0,62
532	—0,028	1,55	596,384	+1,623	0,37
365,444	+0,884	1,12	401	+1,640	0,70
389,394	+1,270	0,68	419	+1,658	0,70
472,464	+0,960	0,63	441	+1,680	0,79
473,379	+0,063	1,56	453	—0,121	0,81
475,480	+0,351	0,48	468	—0,106	0,85
479,305	+0,551	0,65	485	—0,089	0,93
482,401	+0,012	1,14	500	—0,074	0,92
434	+0,045	0,90	521	—0,053	1,19
453	+0,064	0,83	539	—0,035	1,30
483	+0,094	0,67	597,450	+0,876	0,85
483,425	+1,036	0,48	599,450	+1,064	0,66
485,432	+1,240	0,68	600,409	+0,210	0,62
489,494	+1,677	0,92	603,461	+1,450	0,47
490,462	+0,832	1,09	604,455	+0,631	0,66
492,306	+0,864	0,57	605,438	+1,614	0,83
497,410	+0,530	0,86	606,422	+0,785	0,63
501,450	+0,945	0,95	607,435	—0,014	1,60
502,408	+0,090	0,97	620,490	+0,352	0,67
456	+0,138	0,82	621,510	+1,372	0,60

<i>J.J.</i>	ΔT	Δm	<i>J.J.</i>	ΔT	Δm
2427			2427		
622,477	+0,527	0,83	448	—0,003	1,69
623,523	+1,573	0,91	457	+0,006	1,28
624,425	+0,662	1,04	477	+0,026	0,97
472	+0,709	0,91	493	+0,042	1,01
625,432	+1,670	1,37	513	+0,062	0,83
439	+1,677	1,44	541	+0,090	0,74
457	—0,118	1,50	637,449	+0,998	0,44
478	—0,097	1,43	638,414	+0,150	0,64
486	—0,089	1,47	694,345	—0,110	1,08
503	—0,072	1,45	360	—0,095	1,36
512	—0,063	1,51	370	—0,085	1,45
530	—0,045	1,72	379	—0,076	1,40
545	—0,030	1,67	389	—0,066	1,42
555	—0,020	1,45	415	—0,040	1,68
627,399	+0,011	1,81	426	—0,029	1,64
409	+0,021	1,77	436	—0,019	1,73
419	+0,031	1,58	461	+0,006	1,58
435	+0,047	1,45	472	+0,017	1,44
446	+0,058	1,24	696,373	+0,106	0,70
464	+0,076	1,08	389	+0,122	0,66
474	+0,086	0,79	415	+0,148	0,77
483	+0,095	0,67	723,381	—0,075	1,51
513	+0,125	0,51	390	—0,066	1,58
628,443	+1,055	1,04	401	—0,055	1,60
635,426	+0,788	0,83	732,420	—0,099	1,42
636,405	—0,046	1,63	431	—0,088	1,68
421	—0,030	2,06	454	—0,065	1,67
431	—0,020	1,99	473	—0,046	1,75

TV Cassiopeiae. — Points normaux.

ΔT = Phase en jours, partant du minimum d'éclat, d'après les éléments adoptés définitivement.

n = Nombre d'observations utilisées.

Δm = Différence de magnitude ; 0,00 correspondant à la magnitude moyenne extérieure aux éclipses.

$O - C$ = Résidus d'après la courbe théorique définitive la plus probable (Solution U).

ΔT	n	Δm	$O - C$	ΔT	n	Δm	$O - C$
—0,152	6	+0,20	0,00	+0,137	6	+0,05	—0,07
—0,120	5	+0,44	+0,09	+0,176	5	+0,07	+0,03
—0,099	5	+0,58	+1,01	+0,239	4	+0,05	+0,03
—0,080	5	+0,55	—0,06	+0,383	6	+0,01	+0,02
—0,061	7	+0,77	+0,01	+0,536	5	—0,06	—0,05
—0,046	6	+0,88	+0,02	+0,609	5	+0,10	+0,08
—0,029	7	+0,97	0,00	+0,705	6	+0,25	+1,02
—0,013	7	+0,99	—0,04	+0,816	5	+0,23	—0,03
—0,001	6	+1,00	—0,05	+0,910	5	+0,18	+0,03
+0,015	4	+1,05	+0,06	+0,982	5	+0,15	+0,08
+0,026	5	+0,91	+0,02	+1,047	5	—0,01	—0,07
+0,036	6	+0,97	+1,09	+1,181	5	+0,09	+0,04
+0,052	5	+0,72	+1,00	+1,263	5	+0,09	+0,05
+0,069	5	+0,53	+0,03	+1,346	6	+0,08	+0,03
+0,087	5	+0,36	+0,02	+1,436	4	—0,01	—0,08
+0,100	4	+0,29	+0,02	+1,588	6	+0,18	+0,08
+0,113	5	+0,17	—0,04				

CONCLUSIONS

Nous terminons cet ouvrage par un résumé bref des principaux résultats auxquels il nous fait aboutir :

1° Pour calculer les éléments d'un système double à éclipses d'après des documents photométriques, nous avons cherché à généraliser la méthode de HARTING. Cette dernière est comparée à celle de RUSSELL. Nous donnons la préférence à celle de HARTING, d'une part à cause de sa plus grande simplicité théorique ; d'autre part à cause du fait que le problème peut être entièrement résolu à l'aide de formules mathématiquement exactes, alors que la méthode de RUSSELL est pleine de formules approximatives. Le problème pourrait encore être simplifié en établissant des tables que nous proposons (Chapitre VI).

2° Dans nos applications pratiques de la méthode de HARTING, nous avons cherché à associer aux documents photométriques des documents spectroscopiques par application de la méthode de SCHLESINGER simplifiée (Chapitre IV). Nous avons eu la déception de constater des contradictions entre les deux éléments. Leur cause principale est certainement l'espace de temps qui sépare ces deux séries d'observations ; temps pendant lequel des changements dans les éléments du système ont eu lieu. *Une collaboration intime entre photométristes et spectroscopistes est urgente.*

3° Concernant les changements de durée de période, nous rappelons brièvement les travaux de divers auteurs, citant les principales causes : rotation des apsides, aberration, translation du système double autour d'un troisième corps. Nous trouvons qu'une rotation des apsides est probable en sens rétrograde pour RZ Cassiopeiae, R Canis Majoris, TV Cassiopeiae (Chapitre XII) ; phénomène mécaniquement impossible autrement que par translation autour d'un troisième corps.

4° Une application pratique de la méthode de HARTING nous révèle pour cause de dissymétrie d'une courbe de lumière un retard de marée. Ce dernier provoque un mi-

nimum de surface lumineuse visible en retard par rapport au milieu de l'éclipse (Chapitre XII). Beaucoup de courbes dissymétriques inexpliquées pourraient révéler un retard de marée et modifier les éléments actuellement adoptés du système.

Il nous reste beaucoup à apprendre par l'utilisation méthodique d'instruments qui existent et l'application pratique de méthodes de calcul déjà connues.

ERRATA

Page 19, formule (3),

au lieu de :

$$\delta^2 = 1 - z \cos^2 \theta$$

lire :

$$l^2 = 1 - z \cos^2 \theta$$

Pages 26 et 27, formules (20') (23') (24), première formule après le groupe (24).

remplacer tous les d_1 par $d_1 d_2$.

Page 49, formules (18) et (19), limites inférieures des intégrales,

au lieu de :

$$\arcsin [\delta_2 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2} \sin^2 \varphi]$$

lire :

$$\arcsin [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2} \sin^2 \varphi]$$

Page 50, titre du paragraphe 5,

au lieu de :

$$\cos^3 \gamma_1 = \int_0^x \left[1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2} \sin^2 \varphi]^2 \right]^{3/2} d\varphi$$

lire :

$$\int_0^x \cos^3 \gamma_1 d\varphi = \int_0^x \left[1 - [\delta_1 \cos \varphi - \sqrt{k^2 - \delta_1^2} \sin^2 \varphi]^2 \right]^{3/2} d\varphi$$

Page 58, 18^e ligne,

au lieu de :

il suffira de primer les A, B, C, D, x, y, θ ,

lire :

il y aura lieu de remplacer A par $A' = \frac{A}{d_1 d_2}$ et de primer les B, C, D, x, y, θ .

BIBLIOGRAPHIE

1. PICKERING (E. C.). — Spectrum of β Lyrae. *Astronomische Nachrichten*, 128 (1892), p. 39.
2. VOGEL (C.). — On the spectrum of β Lyrae. *Astronomy and Astrophysics* (1894), p. 358.
3. LOCKYER (W.). — The spectrum changes in β Lyrae. *Astronomy and Astrophysics* (1894), p. 578.
4. LUIZET (M.). — Les Céphéides considérées comme étoiles doubles. *Travaux de l'Observatoire de Lyon*, 5 (1912).
5. SHAPLEY (H.). — On the Nature and Cause of Cepheid Variation. *Contributions from the Mount Wilson Observatory*, n° 92 (1914).
6. PICKERING (E. C.). — Dimension of the Fixed Stars with Especial Reference to Binaries and Variable of the Algol type. Variable Stars of short Period. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 16 (1930), p. 1, p. 257.
7. HARTING (J.). — Untersuchungen über der Lichtwechsel des Sternes β Persei (München 1889). *Traité d'Astronomie stellaire* de CH. ANDRÉ, II. p. 185.
8. MYERS (C.). — Untersuchungen über der Lichtwechsel des Sternes β Lyrae (München 1896). The System β Lyrae. *Astrophysical Journal*, 7 (1898), pp. 1-22 *Traité d'Astronomie stellaire* de CH. ANDRÉ, II, p. 286.
9. RUSSELL (H. N.). — On the Determination of the Orbital Elements of Eclipsing Variable Stars. *Astrophysical Journal*, 35 (1912), pp. 315-340 ; 36 (1912), pp. 54-74.
10. STEBBINS (J.). — The Measurement of the Light of Stars with a Selenium Photometer, with an Application to the Variations of Algol. *Astrophysical Journal*, 32 (1910), pp. 185-214.
11. STEBBINS (J.). — A Photo Electric Study of Algol. *Astrophysical Journal*, 53 (1921), pp. 105-120.

12. DUGAN (R. S.). — A Photometric study of U Cephei. *Astrophysical Journal*, 52 (1920), pp. 154-161. *Contributions of the Princeton University Observatory*, n° 5 (1920).
13. EDDINGTON (A. S.). — The Reflection Effect in Eclipsing Variables. *Monthly Notices*, 86 (1926), pp. 320-327.
14. MILNE (E. A.). — The Reflection Effect in Eclipsing Binaries. *Monthly Notices*, 87 (1927), pp. 43-55.
15. PIKE (E. W.). — A Study of the Reflection Effect in Eclipsing Binaries. *Astrophysical Journal*, 73 (1931), pp. 205-215.
16. KRAT (W.). — On the Reflection Effect in Eclipsing Binaries. *Monthly Notices*, 94 (1934), pp. 70-76.
17. WALTER (K.). — Untersuchungen über Bedeckungsveränderliche. *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. Heft 3*.
18. WALTER (K.). — Ueber das System U Cephei. *Astronomische Nachrichten*, 250 (1934), pp. 334-356.
19. ANDRÉ (Ch.). — *Traité d'Astronomie stellaire*, t. II (Gauthier-Villars, Paris, 1900), pp. 241-248.
20. TISSERAND (F.). — Sur l'étoile variable β de Persée. *Comptes Rendus*, 120 (1895), p. 125.
21. LEHMANN-FILHÈS (R.). — Ueber die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus Spectroskopischen Messungen der im Visionsradius liegenden Geschwindigkeitscomponente. *Astronomische Nachrichten*, 136 (1894), pp. 17-30.
22. SCHLESINGER (F.). — The Determination of the Orbit of a spectroscopic Binary by the Method of Least-Squares. *Publications of the Allegheny Observatory*, 1 (1910), pp. 33-44.
23. BAKER (R. H.). — The Orbit of π^4 Orionis. *Publications of the Allegheny Observatory*, 1 (1910), pp. 107-111.
24. HELLERICH (J.). — Untersuchungen über Bedeckungsveränderliche. *Astronomische Nachrichten*, 223 (1924), pp. 369-392.
25. PLASKETT (J. S.). — The Orbit of 21 Cassiopeiae. *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory of Victoria*, 3 (1927), pp. 248-254.
26. CARPENTER (E. F.). — The Combination of Photometric and Spectroscopic Observations of Eclipsing Binaries. *Astronomical Society of the Pacific*, 43 (1931), pp. 30-37.
27. SCHLESINGER (F.), UDICK (S.). — Tables for the True Anomaly in Elliptic Orbits. *Publications of the Allegheny Observatory*, 2 (1912), pp. 155-190.

28. SCHLESINGER (F.). — The Algol-Variable δ Librae. *Publications of the Allegheny Observatory*, 1 (1910), pp. 123-129.
29. STEBBINS (J.). — δ Librae. *Publications of Washburn Observatory*, 15 (1928), pp. 33-40.
30. BAKER (R. H.). — The Eclipsing Binary TW Draconis. *Bulletins of the Lays Observatory*, n° 33 (1921), pp. 29-39.
31. PLASKETT (J. S.). — The Spectroscopic Orbit of Eclipsing Variables : TW Draconis. *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory of Victoria*, 1 (1922), pp. 145-148.
32. RUSSELL (H. N.), SHAPLEY (H.). — On the Darkening at the Limb in Eclipsing Variables. *Astrophysical Journal*, 36 (1912), pp. 239-254, pp. 385-408.
33. ANDRÉ (Ch.). — *Traité d'Astronomie stellaire*, t. II (Gauthier-Villars, Paris, 1900), p. 251.
34. RUSSELL (H. N.). — On the advance of Periastron in Eclipsing Binaries. *Monthly Notices*, 88 (1928), pp. 641-643.
35. ROSSITER (R. A.). — On a Detection of an Effect of Rotation during Eclipse in the Velocity of the Brighter Component of β Lyrae, and on the Constancy of Velocity of this System. *Astrophysical Journal*, 60 (1924), pp. 15-21.
36. MC LAUGHLIN (D. B.). — Spectroscopic Study of Algol. *Astrophysical Journal*, 60 (1924), pp. 22-31.
37. SCHLESINGER (F.). — Spectrographic Observations of λ Tauri, indicating the Presence of a Third Body in the System. *Publications of the Allegheny Observatory*, 3 (1916), pp. 167-178.
38. DANIEL (Z.). — The Orbit and Spectrum of VV Orionis. *Publications of Allegheny Observatory*, 3 (1916), pp. 179-188.
39. REDMAN (R. O.). — Y Cygni. *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory*, 4 (1930), pp. 341-350.
40. SHAPLEY (H.). — On the Apical Motion of a faint Eclipsing Binary. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 66 (1931), p. 469.
41. SHAPLEY (H.), KELLER (K. W.). — YY Sagittarii, an Eclipsing Variable with Moving Line of Apices. *Harvard College Observatory Bulletin*, n° 893 (1933).
42. ELLSWORTH (J.). — Remarques sur le système double à éclipses RZ Cassiopeiae. *Comptes Rendus*, 196 (1933), p. 1212.
43. ELLSWORTH (J.). — Sur la variation de période du système double à éclipses R Canis Majoris. *Comptes Rendus*, 198 (1934), p. 445.

44. DANJON (A.). — Nouveau photomètre différentiel à œil de chat. *Annales de l'Observatoire de Strasbourg*, 2 (1928), pp. 82-90.
45. ELLSWORTH (J.). — Photomètre à œil de chat. *Bulletin de la Société Astronomique de France*, 47 (1933), pp. 52-58.
46. DANJON (A.). — Photométrie des étoiles colorées. *Annales de l'Observatoire de Strasbourg*, 2 (1928), pp. 12-22.
47. ELLSWORTH (J.). — W Ursae Minoris Eléments du système d'après une série d'observations photométriques (1931-33). *Bulletin de l'Association Française d'Observateurs d'Etoiles variables*, 2 (1933), pp. 131-144. *Publications de l'Observatoire de Lyon*, t. 1, fasc. 7, pp. 1-7.
48. JOY (A. H.), DUSTEMER (O. L.). — The Spectrographic Orbit of W Ursae Minoris *Astrophysical Journal*, 81 (1935), p. 479.
49. DUGAN (R. S.). — An Inequality in the Period of the Eclipsing Variable RZ Cassiopeiae. *Monthly Notices*, 76 (1916), pp. 729-739.
50. HELLERICH (J.). — Der Lichtwessell von RZ Cassiopeiae. *Astronomische Nachrichten*, 215 (1921), pp. 336-340.
51. HELLERICH (J.). — Ergebnisse visuellen und photographischen Beobachtungen von RZ Cassiopeiae. *Astronomische Nachrichten*, 233 (1928), p. 129.
52. SITTER (A. de). — The variation of the Period of RZ Cassiopeiae. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Netherlands*, 6 (1933), pp. 119-126.
53. HERTZPRUNG (E.). — On the possibility of determining the Parallax of certain Eclipsing Variables and Spectroscopic Binaries. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Netherlands*, 1 (1922), p. 87.
54. WOLTIER (J.). — On a special case of Orbit determination in the Theory of Eclipsing Variables. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Netherlands*, 1 (1922), pp. 93-95.
55. JORDAN (J. C.). — The Orbit of RZ Cassiopeiae. *Publications of the Allegheny Observatory*, 3 (1914), p. 137.
56. ELLSWORTH (J.). — Remarques sur le système double à éclipses RZ Cassiopeiae. *Comptes Rendus*, 196 (1933), p. 1212.
57. DUGAN (R. S.). — The Eclipsing Variable RZ Cassiopeiae. *Princeton Observatory Contributions*, n° 4 (1916), pp. 24-38 ; *Astrophysical Journal*, 44 (1916), pp. 117-123.
58. HODGEN (H. D.). — The Eclipsing Binary RZ Cassiopeiae. *Bulletins of the Lows Observatory*, n° 34 (1921), pp. 41-50.

59. ELLSWORTH (J.). — Sur la courbe de lumière de la variable à éclipses RZ Cassiopeiae. *Bulletin de l'Association Française d'Observateurs d'Etoiles variables*, 1 (1932), pp. 3-6 ; *Acta Astronomica*, c 1 (1929), p. 87.
 60. ELLSWORTH (J.). — L'étoile variable à éclipses RZ Cassiopeiae. *Gazette Astronomique d'Anvers* (1929), p. 63 ; *Acta Astronomica*, c 1 (1929), p. 31
 61. SITTERLY (B. W.). — The Eclipsing Variable RS Canum Venaticorum. *Princeton Observatory Contributions*, n° 11 (1930), pp. 21-41.
 62. GADOMSKI (J.). — U Cephei. *Circulaire de l'Observatoire de Cracovie*, n° 19 (1925).
 63. CARPENTER (E. F.). — U Cephei. An Anomalous Spectrographic Result. *Astrophysical Journal*, 72 (1930), pp. 206-220.
 64. SHAPLEY (H.). — Elements of the Eclipsing Variables S Cancri, SW Cygni and U Cephei. *Astrophysical Journal*, 36 (1912), pp. 269-285.
 65. WENDELL (O. C.). — U Cephei. *Annals of Harvard College Observatory*, 69 (1909), p. 58.
 66. BAKER (R. H.). — The Eclipsing Binary U Cephei. *Bulletins of the Lays Observatory*, 2 (1911-21), pp. 247-257.
 67. CARRASCO (R.). — Estudio de la Variable Eclipsante U Cephei. *Boletín Astronómico del Observatorio de Madrid*, 1 (1933), n°s 12-13.
 68. Mc DIARMID (R. J.). — TV Cassiopeiae. *Contributions from the Princeton University Observatory*, n° 7 (1924), pp. 4-29.
 69. JORDAN (F. C.). — TV Cassiopeiae. *Publications of the Allegheny Observatory*, 7 (1929), pp. 184-188.
 70. PLASKETT (J. S.). — The Spectroscopic Orbit of TV Cassiopeiae. *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory of Victoria*, 2 (1921), pp. 141-145.
 71. HELLERICH (J.). — Der Lichtwechsel von TV Cassiopeiae. *Astronomische Nachrichten*, 221 (1924), pp. 241-244.
 72. GADOMSKI (J.). — TV Cassiopeiae. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Série A. Sciences Mathématiques* (1923).
 73. ELLSWORTH (J.). — La variable à éclipses TV Cassiopeiae. *Gazette Astronomique d'Anvers* (1930), pp. 119-122.
-

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	7
--------------------	---

Première partie : THEORIE

CHAPITRE PREMIER : Eléments photométriques d'un système double à éclipses, l'orbite étant supposée circulaire. Méthode de Harting. Causes de variabilité en dehors des éclipses	11
CHAPITRE II : Eléments photométriques d'un système double à éclipses, l'orbite étant supposée circulaire (suite). Courbe de lumière rectifiée. Adaptation de la méthode de Harting au cas de composantes ellipsoïdales	19
CHAPITRE III : Orbites elliptiques	29
CHAPITRE IV : Eléments d'un système double spectroscopique. Méthode de Schlesinger simplifiée. Méthode de Carpenter	35
CHAPITRE V : Obscurcissement des disques	43
CHAPITRE VI : Méthode de Harting comparée à la méthode de Russell	53
CHAPITRE VII : Effets des perturbations observables dans un système double à éclipses	59

Seconde partie : APPLICATIONS PRATIQUES

CHAPITRE VIII : Méthode d'observations. Calcul numérique des éléments d'un système	65
CHAPITRE IX : W Ursae Minoris. Eclipsé partielle. Orbite circulaire	69

CHAPITRE X : RZ Cassiopeiae. Eclipse partielle. Orbite faiblement elliptique. Rotation des apsides. Grand retard de marée	73
CHAPITRE XI : U Cephei. Eclipse totale. Orbite fortement elliptique. Retard de marée	85
CHAPITRE XII : TV Cassiopeiae. Eclipse partielle. Orbite elliptique. Rotation pro- bable des apsides. Retard de marée	95
OBSERVATIONS	103
CONCLUSIONS	117
BIBLIOGRAPHIE	119

DEUXIEME THESE

Proposition donnée par la Faculté

Répartition de l'énergie dans les spectres stellaires

Lu et accepté :

Les membres du Jury,

DÉJARDIN

EYRAUD

DUFAY

Vu et approuvé :

Le Doyen,

LONGCHAMBON.

Vu et permis d'imprimer :

LYON, le 5 Juin 1936.

LE RECTEUR, PRÉSIDENT DU CONSEIL DE L'UNIVERSITÉ,

A. LIRONDELLE

IMPRIMERIE DE TRÉVOUX

G. Patissier

—
1936

